

Q1 Prove that $\sqrt{3}$ is irrational

We want to prove that if a number^P is $\sqrt{3}$ then it is irrational^Q, using contradiction.

So we assume that P and $\neg Q$ is true and try to derive a contradiction.

(P $\wedge$ $\neg Q$)
a number is $\sqrt{3}$ and rational

• As $\sqrt{3}$ is rational, we can write it

$\sqrt{3} = \frac{a}{b}$, where a and b are integers and $b \neq 0$ and a/b cannot be reduced.

• $(\sqrt{3})^2 = (\frac{a}{b})^2$

(يعني ما في عوامل مشتركة بين a, b)

• $3 = \frac{a^2}{b^2}$

يعني a, b relatively prime

• $3b^2 = a^2 \Rightarrow a^2$ is multiple of 3

• $a = 3k$

↓

• $3b^2 = (3k)^2$

a is multiple of 3 $\Rightarrow$

$b^2 = \frac{9k^2}{3} = 3k^2$

↓

$a = k \cdot 3$

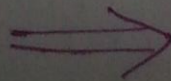
$b^2 \Rightarrow$ multiple of 3

$\therefore b$ multiple of 3

إذا كانت a، إحدى عواملها 3

و b كذلك، إحدى عواملها 3

معناها الفرضية بأن a و b ليس بينهما عوامل مشتركة خاطئة (contradiction)



$\neg Q$ خطأ

$\Rightarrow$ صحيح

$\sqrt{3}$ is rational

2

سوال ① با اختصار

$\sqrt{3}$ is rational

$$\sqrt{3} = \frac{a}{b}$$

$$3 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$3b^2 = a^2$$

a is multiple of 3

b is multiple of 3

and now we have a contradiction.

Q2] Establish the validity $\neg \forall x (P(x) \rightarrow Q(x) \wedge R(x))$

3

Every one is forty is fat and funny.

No one is funny and no one is fat.

So No one is forty.

Let $P(x)$: x is forty

$Q(x)$: x is fat

$R(x)$: x is funny

$$(1) \forall x (P(x) \rightarrow Q(x) \wedge R(x))$$

hypothesis

$$(2) \forall x \neg Q(x) \wedge \forall x \neg R(x)$$

hypothesis

$$(3) P(w) \rightarrow Q(w) \wedge R(w)$$

universal instantiation from (1)

$$(4) \forall x \neg Q(x)$$

simplification from (2)

$$(5) \forall x \neg R(x)$$

from (2)

$$(6) \neg Q(w)$$

~~universal~~ Existential instantiation from (4)

$$(7) \neg R(w)$$

$$(8) \neg (Q(w) \wedge R(w))$$

$$(9) \neg P(w)$$

modus tollens.

$$(10) \therefore \forall x \neg P(x)$$

universal generalization / conclusion.

Q5/ Find the smallest big-O of the following equation

a)
$$\underbrace{25n \log n}_{O(n \log n)} + \underbrace{300}_{O(1)} + \underbrace{(3n+1)(2n+5)}_{O(n^2)}$$

$O(n^2)$
 $(6n^2 + 3 \cdot 5n + 2n + 5)$

$O(n^2)$

السؤال يطلب دائماً Smallest big-O
لأنه لو واحد ال Smallest يكون عدد لا نهائي من الحلول ، يجب انو أي فنكشن يقدر أصيب أكثر من فنكشن يكون أكبر منو

$$n < n^2 < n^3 < n^4 \dots$$

احنا عيين بأصغر فنكشن يكون أكبر من الفنكشن المعطى (أصغر أكبر فنكشن)

b)
$$\underbrace{x^3 + 2x^2 - 4x + 3^x}_{O(3^x)}$$

في ما احنا عارفين
 $3^x > x^3$

c)
$$\underbrace{3n^2 \log n}_{O(n^2 \log n)} + \underbrace{5n + 48000}_{O(n)}$$

$O(n^2 \log n) > O(n)$

$\Downarrow$

$O(n^2 \log n)$

d)
$$\underbrace{n^2}_{O(n^2)} + n + \log(n!)$$

$\log(n!) < n^2$

$\Downarrow$

$O(n^2)$

$$\begin{aligned} \log(n!) &= \log(1) + \log(2) \\ &+ \log(3) + \log(4) \\ &+ \dots + \log(n!) \\ &< \log(n) + \log(n) \\ &+ \log(n) + \dots + \log(n) \\ &< n \log(n) < n^2 \end{aligned}$$

Q4

4

$$A \text{ join } B \equiv A \vee B := [a_{ij} \vee b_{ij}]$$

لازم تكون عارفين كيف الحل بالأساس

Procedure join ($A: \text{matrix}^{(m \times n)}$; $B: \text{matrix}^{(m \times n)}$)

$O(1)$ $C := \text{matrix}^{(m \times n)}$ {with the same dimensions as A, B}

$O(m)$ For $i := 1$ to $m \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Loop} \\ \text{rows على ال} \end{array} \right\}$

$O(m \times n)$ For $j := 1$ to $n \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Loop} \\ \text{columns لل} \end{array} \right\}$

$O(1)$ $C_{ij} := a_{ij} \vee b_{ij}$

$O(1)$ return C $O(m \times n)$ complexity

تحليل الحل في البراية الـ index يكون 1

ويغوت جوا ال Loop الثانية

وهكذا في المرة الأولى

$$C_{11} = a_{11} \vee b_{11} \Rightarrow C_{12} = a_{12} \vee b_{12} \Rightarrow$$

بعين تزيد ال i وتصير 2

ويبقى ال row الثاني بالـ matrix.

حتى نجيب ال complexity بنفسه بطر سطر بالـ algorithm وبنشوف

حل ال instruction يعتمد على ال input

وإذا لا مثلاً كان $x = 1 + 2$ تكون ال complexity له $O(1)$

وإذا نعم بنشوف ال العلاقة اللي بتعتمد فيها على ال input

مثلاً في حالة السؤال بال Loop ، إذا كان ال input هو

matrix حجمها $(m \times n)$ حيتقذ ال Loop الأولى m مرة

وال Loop الداخلية في n مرة وتكون ال complexity $(m \times n)$

* لاحظي ال Loop الداخلية بتقذ في n مرة عند $m = 1$

وكان n مرة عند $m = 2$ وهكذا ، عشان هيك مزيان $m \times n$

Q6 (a) ① $\sum_{k=0}^{10} 3^{k+3}$

$= \sum_{k=0}^{10} \text{Constant } 3^3 \cdot 3^k = 3^3 \sum_{k=0}^{10} 3^k = 27 (3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots)$

$= 27 (88573) = 2391471$

② $\sum_{k=0}^8 k^3 = \sum_{k=1}^8 k^3$

$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

ملاحظة
الحاصل
على
ال
2

$= \frac{8^2 (8+1)^2}{4} = \frac{8^2 (9)^2}{4} = 1296$

الجدول حفظ
166
ص

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$AC = B$

$|A| = (2 \times 4) - (1 \times 3) = 5$ * يمكن نرفض ونضرب

$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$

أو نجيب inverse ونضرب

بالطرفين (الحل الأسهل)

في حالة

(2x2) matrix

$AA^{-1}C = BA^{-1}$

$C = BA^{-1}$

$C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{5} & \frac{-9}{5} \\ \frac{8}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

##