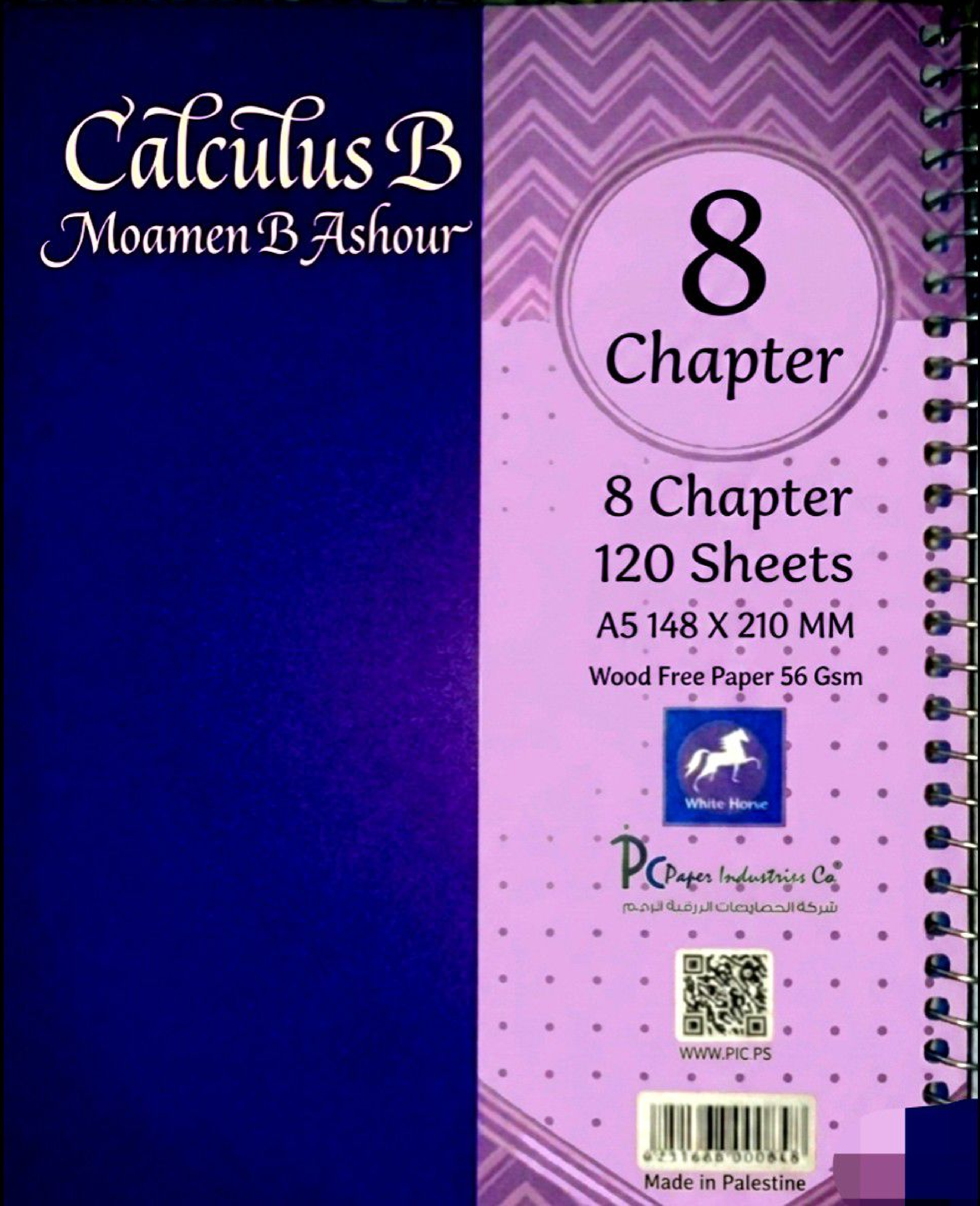


Calculus B

Moamen B Ashour

8

Chapter

8 Chapter

120 Sheets

A5 148 X 210 MM

Wood Free Paper 56 Gsm

White Horse

PC Paper Industries Co®

شركة الصناعات الورقية م.ع.م

WWW.PIC.PS

Made in Palestine

*Substitution Rule التكامل بالتعويض

خطوات الحل يباشا!!

1 نختار فرض مناسب يساوي y

2 نشتق y لنحصل على dx بدلالة dy

3 نحول التكامل من x لـ y

4 نجد قيمة التكامل بدلالة y

5 بعد حساب التكامل نعوض عن y لا علينا

$$* \int x\sqrt{x^2+7}\,dx$$

$$y = x^2+7$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\boxed{dx = \frac{dy}{2x}}$$

$$\int \cancel{x}\sqrt{y}\,\frac{dy}{2\cancel{x}}$$

$$\frac{1}{2}\int \sqrt{y}\,dy$$

$$\frac{1}{2}\int y^{\frac{1}{2}}\,dy$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{3}y^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{3}y^{\frac{3}{2}} + c \Rightarrow \frac{1}{3}(x^2+7)^{\frac{3}{2}} + c$$

MoomenBAshour

مؤمن بسام عاشور ☺

$$\boxed{dx = \frac{dy}{\text{مشتقة}}}$$

$*\int 2^x \cdot \sin(2^x)\,dx$

$y = 2^x$

$\frac{dy}{dx} = 2^x (1) L(2)$

$dx = \frac{dy}{2^x \cdot L(2)}$

$\int \cancel{y} \cdot \sin(y) \frac{dy}{\cancel{2^x} \cdot \ln(2)}$

$\frac{1}{\ln(2)} \int \sin(y)\,dy$

$= \frac{1}{\ln(2)} \cdot -\cos(y) + C \Rightarrow$

$$\boxed{= \frac{-\cos(2^x)}{\ln(2)} + C} \#$$

$*\int x\sqrt{x-3}\,dx$

$y = x-3$

$\int x\,(x-3)^{\frac{1}{2}}\,dx$

$dx = \frac{dy}{1}$

$$\boxed{dx = dy}$$

$\int \textcircled{x}\, y^{\frac{1}{2}}\,dy \rightarrow$ من الفرض عوض

$y = x-3$

$$\boxed{x = y+3}$$

$\int (y+3) \cdot y^{\frac{1}{2}}\,dy$

$\int y^{\frac{3}{2}} + 3y\,dy =$

$\frac{2}{5} y^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} + C$

$$\boxed{\frac{2}{5}(x-3)^{\frac{5}{2}} + 2(x-3)^{\frac{3}{2}} + C}$$

$$*\int \frac{e^{x}}{9+e^{2x}}\,dx$$

$$y^2 = e^{2x}$$

$$y = e^{x}$$

$$\boxed{dx = \frac{dx}{e^{x}}}$$

في حالة exp اختار
الابسط وافرضه هو

$$\int \frac{\cancel{y}}{9+y^2}\,\frac{dy}{\cancel{e^{x}}}$$

$$\int \frac{1}{9+y^2}\,dy$$

$$= \frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{y}{3}\right)+c$$

$$= \frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{e^{x}}{3}\right)+c$$

$$*\int_0^1 \frac{\tan^{-1}(x)}{1+x^2}\,dx$$

$$y = \tan^{-1}(x)$$

$$dx = \frac{dy}{\frac{1}{1+x^2}}$$

$$\boxed{dx = (1+x^2)\,dy}$$

$$= \int \frac{y}{\cancel{1+x^2}}\,\cancel{(1+x^2)}\,dy$$

$$= \int y \cdot dy$$

$$= \frac{y^2}{2}$$

$$= \left.\frac{(\tan^{-1}(x))^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left[(\tan^{-1}(1))^2 - \tan^{-1}(0)^2\right]$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{16}-0\right) = \boxed{\frac{\pi^2}{32}}$$

$* \int_{1}^{e} \frac{f(\ln(x))}{5x} \, dx = ??$. Given $\int_{0}^{1} f(x)\, dx = 60$

$y = \ln(x)$

$dx = \frac{dy}{\frac{1}{x}}$

$\boxed{dx = x \, dy}$

$\int_{0}^{1} \frac{f(y)}{5\cancel{x}} \cancel{x} \, dy$

$x = 1 \Rightarrow y = \ln(1) = 0$

$x = e \Rightarrow y = \ln(e) = 1$

الحدود الجديدة ٠، ١

$\frac{1}{5} \int_{0}^{1} f(y)\, dy \searrow 60$

معطى بالسؤال

$\frac{1}{5} * 60 = \boxed{12}$

Eng-Moamen-B-Ashour

ولسته *** Integration by parts** تفويق اجزاء

$$\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du$$

* $\int Ln(x) \cdot dx =$

استفاده ← $u = Ln(x)$ * $dv = dx$ → تكامل

$du = \frac{1}{x}$ $v = x$

$$\int Ln(x) \cdot dx = x \cdot Ln(x) - \int \cancel{x}\left(\frac{1}{\cancel{x}}\right) dx$$

$$\boxed{= x \cdot Ln(x) - x - c}$$

اولوية اختيار الجزء المراد اشتقاقه يا باشا

① Inverse عكسي

② Logrthams لوغاريتم

③ Polynmials كثير حدود

④ Trgmaeldc مثلثي

⑤ Exponatial أسي

Madmen B. Ashour

* $\int x \cdot \cos(x)\, dx \rightarrow$ أجزاء

$u = x$ $\qquad dv = \cos(x)$

$du = 1\,dx \xleftarrow{-} \quad v = +\sin(x)$

اختار الاسهل
الي ممكن يبسط
التكامل مش
يعقده بالنسبة

$$\int x \cdot \cos(x)\, dx = x \sin(x) - \int \sin(x) \cdot dx$$

$$\boxed{= x \sin(x) + \cos(x) + C}$$

* $\int \tan^{-1}(x) \cdot dx \longrightarrow$ أجزاء

$u = \tan^{-1}(x)$ $\qquad dv = dx$

$du = \dfrac{1}{1+x^2} \xleftarrow{-} \quad v = x$

$\frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2}$

$\frac{1}{2} \cdot \ln(1+x^2) + c$

$$\int \tan^{-1}(x) \cdot dx = x \cdot \tan^{-1}(x) - \int x \cdot \left(\frac{1}{1+x^2}\right) \cdot dx$$

$$\boxed{= x \cdot \tan^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + c}$$

$* \int_0^1 8x\ e^{2x}\,dx \rightarrow$ ابدا

$u = 8x \quad + \quad dv = e^{2x}$

$du = 8 \quad -\int \quad v = \frac{e^{2x}}{2}$

$$\int_0^1 8x \cdot e^{2x} = 8x \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2} \cdot 8 \cdot dx$$

$$= 4xe^{2x} - \int 4 \cdot e^{2x}\,dx$$

$$= \left. 4xe^{2x} - \frac{4e^{2x}}{2} \right]_0^1$$

$$\left(4(1)e^{2(1)} - \frac{4}{2}e^{2(1)}\right) - \left(0 - 2e^0\right)$$

$$= 4e^2 - 2e^2 + 2$$

لَحد

$$\boxed{= 2e^2 + 2} \#$$

$$\boxed{2(e^2+1)}$$

$* \int x^3 \cdot \sin(x)\, dx$

[illegible]

هاي رح تتطلب تنفذ

كثير من الاجراءات عشان

هيك هي طريقة اسهل

هاي بتكون من كثير ررر

مع سالب او +ي

وبس والله

u		dv
x^3	$\oplus$	$\sin(x)$
$3x^2$	$\oplus$	$-\cos(x)$
$6x$	$\oplus$	$-\sin(x)$
6	$\ominus$	$\cos(x)$
0		$\sin(x)$

$\int x^3 \cdot \sin(x)\, dx =$

$$= -x^3\cos(x) + 3x^2\sin(x) + 6x\cos(x) - 6\sin(x)) + C$$

$* \int (4x+5)^2 e^x\, dx$

$u =$ [illegible] $dv =$

$(4x+5)^2$	$\oplus$	e^x
$2(4x+5)(4)$	$\ominus$	e^x
$8(4)$	$\oplus$	e^x
0		e^x

$$= (4x+5)^2 e^x - 8(4x-5)e^x + 32e^x$$

$$= e^x((4x+5) - 8(4x-5) + 32 + C$$

$* \int e^x \cdot \sin(x)\,dx$

$u = e^x \quad + \quad dv = \sin(x)$

$du = e^x \quad 2 \quad v = -\cos(x)$

$\int e^x \cdot \sin(x)\,dx = -e^x\cos(x) + \int e^x \cos(x)\,dx$

مش هنتخلص من التكامل
انقل على الطرف الاخر

$u = e^x \quad + \quad dv = \cos(x)$

$du = e^x \quad -2 \quad v = \sin(x)$

$\int e^x \cdot \sin(x)\,dx = -e^x\cos(x) + e^x\sin(x) - \int e^x \sin(x)\,dx$

$\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}\int e^x \sin(x)\,dx = \frac{-e^x\cos(x) + e^x\sin(x)}{2} + C$

$\boxed{= \frac{-1}{2}e^x\cos(x) + \frac{1}{2}e^x\sin(x) + C}$

دوار يا دوار أنا دووووووخ

$* \int x^2 \cdot \ln(x)\, dx \longrightarrow$ by parts

$u = \ln(x) \qquad dv = x^2$

$du = \frac{1}{x} dx \quad \& \quad v = \frac{x^3}{3}$

$= \frac{x^3}{3} \ln(x) - \int \frac{x^{3\,2}}{3} * \frac{1}{\cancel{x}}\, dx$

$$\boxed{= \frac{x^3}{3} \ln(x) - \frac{x^3}{9} + c} \; \#$$

$\int \frac{\ln(x)}{x^2} \cdot dx = \int x^{-2} \ln(x)\, dx$

لما ننقل $\boxed{X}$ رح نغيّر
بعكس

$u = \ln(x) \qquad dv = x^{-2}$

$du = \frac{1}{x} \quad \& \quad v = \frac{x^{-1}}{-1} = \frac{-1}{x}$

$\frac{-\ln(x)}{x} + \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}\, dx$

$\frac{-\ln(x)}{x} + \int x^{-2}\, dx \Longrightarrow \boxed{\frac{-\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} + c}$

اولاً هي تعويض لبديه
ا مراد يباشا

$y = 2x+1$

$$\boxed{dx = \frac{dy}{2}}$$

* $\int Ln(2x+1)\,dx$

$\int Ln(y)\,\frac{dy}{2}$

$\frac{1}{2}\int Ln(y)\,dy$

$u = Ln(y) \quad dv = dy$

$du = \frac{1}{y}\,dy \quad v = y$

$\frac{1}{2}[\,y\,Ln(y) - \int \cancel{y} \cdot \frac{1}{\cancel{y}} \cdot dy$

~~$\frac{1}{2}[\,y\,Ln(y) - \int \frac{1}{y^2} \cdot dy$~~

$\frac{1}{2}[\,y\,Ln(y) - y\,] + C$

$$\boxed{\frac{1}{2}[\,2x+1\,Ln(2x+1) - (2x+1)\,] + C}\ \#$$

Moamen-B-Ashour

لو كان جي باعقام x
نعوضه راح نروح

$\int (Ln(x))^2 \cdot dx$

$Ln(x)^2 = 2Ln(x)$

$(Ln(x))^2 \neq$

ملاحظة دقيقة ماعليك

$u = (Ln(x))^2 \qquad dv = dx$

$du = 2Ln(x) \cdot \frac{1}{x} \qquad v = x$

$= x(Ln(x))^2 - \int \frac{2Ln(x)}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x}\, dx$

$= x(Ln(x))^2 - 2(xLn(x) - x) + c$

احفظي فقط

$= xLn(x) - x + c$

$= x(Ln(x))^2 + 2xLn(x) + x + c$

$\int e^{\sqrt{x}} \cdot dx \Rightarrow \int e^y \cdot 2y\, dy$

$y = \sqrt{x}$

$dx = \frac{dy}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$

$\boxed{dx = 2\sqrt{x}\, dy}$

$\boxed{dx = 2y\, dy}$

$u = 2y \qquad dv = e^y$

$du = 2\, dy \qquad v = e^y$

$= 2ye^y - \int 2e^y\, dy$

$= 2ye^y - 2e^y + c$

$\boxed{2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + c}$ #

موقن عاسوب

وزع الجذر

x^3 عامل مشترك

$$* \int \sqrt[3]{x^3+4x^4}\,.\,dx = \int \sqrt[3]{x^3(1+x)}\,dx = \int \sqrt[3]{x^3}\,.\,\sqrt[3]{(1+4x)}\,dx$$

$$= \int x\,.\,\sqrt[3]{(1+4x)}\,dx = \int x\,.\,(1+4x)^{\frac{1}{3}}\,dx$$

$$= u = x \qquad dv = (1+4x)^{\frac{1}{3}}$$

$$du = dx \qquad v = \frac{3}{4}\frac{(1+4x)^{\frac{4}{3}}}{4}$$

$$= \frac{3x}{16}(1+4x)^{\frac{4}{3}} - \int \frac{3}{16}(1+4x)^{\frac{4}{3}}\,dx$$

$$= \frac{3x}{16}(1+4x)^{\frac{4}{3}} - \left[\frac{3}{16} * \frac{3}{7}\,\frac{(1+4x)^{\frac{7}{3}}}{4}\right] + c$$

$$\frac{3}{16}\left(x(1+4x)^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{28}(1+4x)^{\frac{7}{3}}\right) + C$$

لاحظ المشتقة تحته
اعمل تعويض

$$*\int \frac{x\sin^{-1}(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \rightarrow$$

$$\int \frac{\boxed{x}\,y}{\cancel{\sqrt{1-x^2}}}\,\cancel{\sqrt{1-x^2}}\,dy$$

$$\int \sin(y)\cdot y\,dy$$

$u=y \qquad dv=\sin(y)$

$du=dy \qquad v=-\cos(y)$

$$=-y\cos(y)+\int\cos(y)$$

$$=-y\cos(y)+\sin(y)+C$$

$$-\sin^{-1}(x)\cos(\sin^{-1}(x))+\cancel{\sin}(\cancel{\sin^{-1}})+C$$

$$-\sin^{-1}(x)\cos(\sin^{-1}(x))+X+C$$

$$-\sin(x)\sqrt{1-x^2}+X+C$$

$$\boxed{\sin y=X}$$

$$\uparrow\ y=\sin^{-1}(x)$$

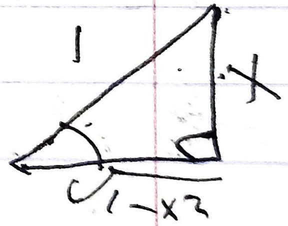
$$dx=\frac{dy}{\frac{1}{\sqrt{-x^2+1}}}$$

$$dx=\sqrt{1-x^2}\,dy$$

$\cos(\sin^{-1}(x))$

$\theta=\sin^{-1}(x)$

$\sin\theta=\frac{X}{1}$



$$1^2=X^2+(\ )^2$$

$$\sqrt{(\ )^2}=\sqrt{1-x^2}$$

$$\boxed{=\frac{\sqrt{1-x^2}}{1}}$$

* Trigonometric functions

$$* \int \sin(x) \cdot dx = -\cos(x) + c$$

ضعف الزاوية

$$* \int \sin^2(x) \cdot dx = \frac{1}{2}\int 1-\cos(2x)\, dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin(x)}{2}\right) + c$$

متطابقة

$$* \int \sin^3(x) \cdot dx = \int \sin(x) \cdot \sin^2(x)$$

افرض

$$= \int \sin(x) \cdot (1-\cos^2(x))\, d\cancel{x}$$

سالب

$$= \int \cancel{\sin(x)} \cdot (1-y^2) \frac{dy}{\cancel{-\sin(x)}}$$

$y = \cos(x)$

$$\boxed{dx = \frac{dy}{-\sin(x)}}$$

$$= \int y^2 - 1\, dy$$

$$= \frac{y^3}{3} - y + c$$

Moamen-B-Ashour

$$\boxed{\frac{\cos^3(x)}{3} - \cos(x) + c} \#$$

* $\int \tan(x)\cdot dx = -\int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\ln|\cos(x)|+c$

متطابقة　　　　　　　　　　احفظ

* $\int \tan^2(x)\cdot dx = \int \sec^2(x)-1\, dx = \tan(x)-x+c$

متطابقة

* $\int \tan^3(x)\cdot dx = \int \tan(x)\cdot\overbrace{\tan^2(x)}\, dx =$

$= \int \tan(x)\cdot(\sec^2(x)-1)\, dx$

وزع التكامل　　　　　　　　　　بعرف تكاملها محفوظ من فوق

$= \int \tan(x)\,\text{ses}^2(x) - \boxed{\tan(x)}$

$= \int \tan(x)\sec^2(x)\,dx - \int \tan(x)\, dx$

$\downarrow$

$-\ln|\cos(x)|+c$

$y = \tan(x)$

$dx = \frac{dy}{\sec^2(x)}$

$= \int y \sec^2(x) \frac{dy}{\sec^2(x)}$

$= \frac{y^2}{2} \Rightarrow \frac{\tan^2(x)}{2} + \ln|\cos(x)|+C$

*Reduction formulas

$* \int \sin^n(x)\,dx = \frac{-1}{n}\sin^{n-1}(x)\cos(x) + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}(x)\,dx$

$* \int \cos^n(x)\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1}(x)\sin(x) + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}(x)\,dx$

$* \int \tan^n(x)\,dx = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1}(x) - \int \tan^{n-2}(x)\,dx$

$* \int \sec^n(x)\,dx = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2}(x)\tan(x) + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2}(x)\,dx$

$* \int \sin^4(x)\cdot dx$

متطابقة ضعف الزاوية

$= \frac{-1}{4}\sin^3(x)\cos(x) + \frac{3}{4}\left\{\int \sin^2(x)\,dx\right\} \rightarrow \boxed{\frac{1}{2}}(1-\cos(2x))$

ضرب

$= \frac{-1}{4}\sin^3(x)\cos(x) + \frac{3}{8}\int 1-\cos(2x)\,dx$

$= \frac{-1}{4}\sin^3(x)\cos(x) + \frac{3}{8}\left(x - \frac{\sin(x)}{2}\right) + C$

Moamen B. Ashour

ممكن تكرر الطلع مرة اخرى

ممكن تحل بتعويض تكامل

$$* \int \cos^5(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{5}\cos^4(x)\sin(x) + \frac{4}{5}\int \cos^3(x)\,dx$$

$\sin(x)$ ↑

$$= \frac{1}{5}\cos^4(x)\sin(x) + \frac{4}{5}\left(\frac{1}{3}\cos^2(x)\sin(x) + \frac{2}{3}\int \cos(x)\,dx\right)$$

$$\boxed{\frac{1}{5}\cos^4(x)\sin(x) + \frac{4}{15}\cos^2(x)\sin(x) + \frac{8}{15}\sin(x) + C}$$

$$* \int \tan^4(x)\,dx$$

متطابقة

$$= \frac{1}{3}\tan^3(x) - \int \tan^2(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\tan^3(x) - \int \sec^2(x) - 1\,dx$$

$$\boxed{= \frac{1}{3}\tan^3(x) - \tan(x) + x + C}$$

طلاسم

* $\int \sec^5(x)\, dx$

تكاملة

لازم نكامل كل واحدة
بحدة

$= \frac{1}{4}\sec^3(x)\tan(x) + \frac{3}{4}\int \sec^3(x)\, dx$

$= \frac{1}{4}\sec^3(x)\tan(x) + \frac{3}{4}\Big(\frac{1}{2}\sec(x)\tan(x) + \frac{1}{2}\int \sec(x)\, dx$

$= \frac{1}{4}\sec^3(x)\tan(x) + \frac{3}{8}\sec(x)\tan(x) + \frac{3}{8}\ln|\sec + \tan(x)| + c$

Trigomantric functions

$\boxed{1}\ \int \sin^n(x)\cos^n(x)\, dx$	$\boxed{2}\ \int \tan^n(x)\sec^n(x)$
$\int \sin^3(x)\cos^4(x) \to y=\cos(x)$	$\int \tan^3(x)\sec^4(x) \to$ $y=\tan(x)$ $y=\sec(x)$
$\int \sin^3(x)\cos^5(x) \to y=\cos(x)$	$\int \tan^4(x)\sec^2(x) \to y=\tan(x)$
$\int \sin^4(x)\cos^2(x) \to$ لابد م تعويض	$\int \tan^3(x)\sec^3(x) \to y=\sec(x)$

$\boxed{3}\ \int \sin(ax)\cos(bx)\, dx$

$* \int \sin^3(x)\cos^4(x)\,dx$

متطابقة

$y = \cos(x)$

$\boxed{dx = \frac{dy}{-\sin(x)}}$

$= \int \sin^{\cancel{3}\,2}(x) * y^4(x)\,\frac{dy}{\cancel{-\sin(x)}}$

$= -\int (1-\cos^2(x)) * y^4\,dy$

$\int (1-y^2)\cdot y^4\,dy$

مؤمن بسام عاشور

$\int y^4 - y^6\,dy \Rightarrow$

$= \frac{y^5}{5} - \frac{y^7}{7} + c \Rightarrow \boxed{\frac{\cos^5(x)}{5} - \frac{\cos^7(x)}{7} + c}$

$* \int \sin^5(x)\cos^3(x)\,dx$

ملاحظة: اذا الفردين اح فور القوة الاعلى

متطابقة

$y = \sin(x)$

$\boxed{dx = \frac{dy}{\cos(x)}}$

$= \int y^5 \cos^{\cancel{3}\,2}(x)\,\frac{dy}{\cos(x)}$

$= \int y^5(1-y^2)\,dy \rightarrow 1 - \cos^2(x)$

$= \int y^5 - y^7\,dy$

$= \frac{y^6}{6} - \frac{y^7}{7} + c \Rightarrow \boxed{\frac{\sin^6(x)}{6} + \frac{\sin^7(x)}{7} + c}$

$* \int \sin^2(x)\cos^2(x)\,dx \longrightarrow$ مش شرط فردي

$* \int (\sin(x)\cos(x))^2\,dx$ $\qquad \boxed{\frac{\sin(2x)}{2}} = \frac{\cancel{2}\sin(x)\cos(x)}{\cancel{2}}$

$* \int \left(\frac{\sin(2x)}{2}\right)^2 dx \Rightarrow \int \frac{\sin^2(2x)}{4}\,dx$

ضعف

متطابقة

$\Rightarrow \frac{1}{4}\int \sin^2(2x)\,dx \Rightarrow \frac{1}{2} * \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos(4x)\,dx}{2}$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{1}{8}\left(x - \frac{\sin(4x)}{4}\right) + C} \;\#$$

$* \int \tan^3(x)\sec^5(x)\,dx$

$y = \sec(x)$

$$dx = \frac{dy}{\underbrace{\sec(x)\tan(x)}_{y}}$$

$= \int \tan^{\cancel{3}\,2}(x) \cdot y^{\cancel{5}\,2} \frac{dy}{\cancel{y}\cdot\cancel{\tan(x)}}$

متطابقة

$= \int \tan^2(x) \cdot y^2\,dy$

$= \int (\overset{y^2}{\sec^2(x)} - 1) \cdot y^2\,dy$

$= \int y^4 - y^2\,dy \Longrightarrow \boxed{\frac{\sec^5(x)}{5} - \frac{\sec^3(x)}{3} + C}$

[redacted] $= \frac{y^5}{5} - \frac{y^3}{3} + c$

$* \int \tan^2(x) \sec^4(x)\, dx$

$y = \tan(x)$

$dx = \dfrac{dy}{\sec^2(x)}$

$= \int y^2 \cdot \sec^{\cancel{4}\,2}(x) \dfrac{dy}{\cancel{\sec^2(x)}}$

متطابقة

$= \int y^2 \cdot \underbrace{\sec^2(x)} \, dy$

$= \int y^2 \cdot (1 + \overset{y^2}{\tan^2(x)})\, dy$

$= \int y^2 + y^4 \, dy$

$\Longrightarrow \boxed{\dfrac{\tan^3(x)}{3} + \dfrac{\tan^5(x)}{5} + C}$ #

$= \dfrac{y^3}{3} + \dfrac{y^5}{5} + C$

$* \int \tan^3(x) \sec^4(x)\, dx \Longrightarrow$ بنفس فكرة الاولى

$y = \tan(x)$

$\boxed{dx = \dfrac{dy}{\sec^2(x)}}$

$= \int y^3 \cdot \sec^{\cancel{4}\,2}(x) \dfrac{dy}{\cancel{\sec^2(x)}}$

متطابقة

$= \int y^3 \cdot \sec^2(x)\, dy$

$= \int y^3 (1 + \overset{y^2}{\tan^2(x)})\, dy$ # $\boxed{\dfrac{\tan^4(x)}{4} + \dfrac{\tan^6(x)}{6} + C}$

$= \int y^3 + y^5 \Longrightarrow = \dfrac{y^4}{4} + \dfrac{y^6}{6} + C$

متطابقات هامة لما يكون الزوايا مختلفة

وبه لا يحفظ يجرب بيت الحفظ !!! اح

مختلفين دول sin وده

$$\sin(A)\cos(B) = \frac{1}{2}\left(\sin(A-B) + \sin(A+B)\right)$$

متشابه هنا cos سالب

$$\sin(A)\cdot\sin(B) = \frac{1}{2}\left(\cos(A+B) - \cos(A+B)\right)$$

$$\cos(A)\cdot\cos(B) = \frac{1}{2}\left(\cos(A-B) + \cos(A+B)\right)$$

متشابه

$$\int 4\sin(6x)\cdot\sin(4x)\,dx$$

$$= \int 4\cdot\frac{1}{2}\left(\cos(2x) - \cos(10x)\right)dx$$

$$= 2\left(\frac{\sin(2x)}{2}\right) - \left(\frac{\sin(10x)}{10}\right) + c$$

$$\boxed{= \sin(2x) - \frac{\sin(10x)}{5} + c}$$

Moamen_B_Ashour

$\cos \rightarrow$ even

كادي السالب نشيله

$*\ \int \cos(5x)\cos(10x)\,dx$

$= \int \frac{1}{2}\left(\cos(-5x) + (\cos(15x)\right) dx$

$= \frac{1}{2}\int \cos(5x) + \cos(15x)\,dx$

$\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(5x)}{5} + \frac{\sin(15x)}{15}\right) + C$

$= \frac{5}{2}\sin(5x) + \frac{15}{2}\sin(15x) + C$ #

$*\ \int -2\sin(3x)\cos(2x)\,dx$

$= \int -\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\left(\sin(x) + \sin(5x)\right) dx$

$= -1\left(-\cos(x) + \frac{-\cos(5x)}{5}\right) + C$

$= \cos(x) + \frac{\cos(5x)}{5} + C$

عذاار شو بيشبهك تشريف

مؤمن دباغ مشكور

* Trigonometric-substitution *

$a^2 - x^2$

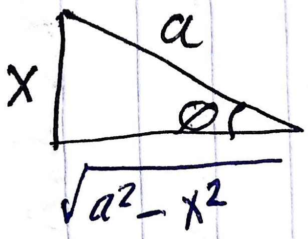
جذر الأس ← $x = a\sin(\theta)$ ← جذر العدد فوقه

اشتق

$dx = a\cos(\theta)\,d\theta$

تيجي جري

$\sin\theta = \frac{x}{a}$ x → مقابل, a → وتر



الضلع المفقود بكون نفسه
اعلاه بس تحت الجذر

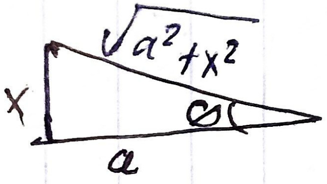
$a^2 + x^2$

$x = a\tan(\theta)$

اشتق

$dx = a\sec^2(\theta)\,d\theta$

$\tan\theta = \frac{x}{a}$ x → مقابل, a → مجاور



فيثاغورس
او عكس هاي

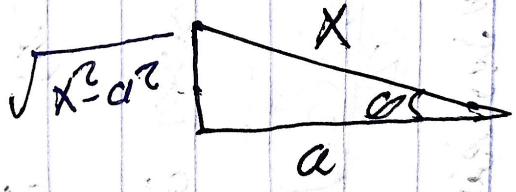
$x^2 - a^2$

$x = a\sec(\theta)$

اشتق

$dx = a\sec(\theta)\tan(\theta)\,d\theta$

$\sec(\theta) = \frac{x}{a}$ x → وتر, a → مجاور



Moomen-B-Ashour

Eng الاشوري

$* \int \sqrt{4-x^2}\,dx$ → ما بزبط تعويض ولا قواعد عادي

رح نبدل كل x بفرضنا وكل dx بفرضنا

$= x = \sqrt{4}\cdot\sin\theta$

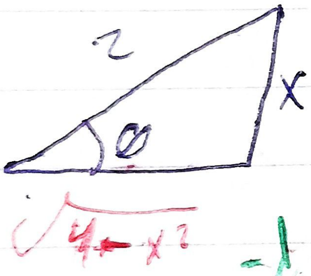
$\boxed{x = 2\sin(\theta)}$ → فرض

$dx = 2\cos(\theta)\,d\theta$

↓

$\sin\theta = \frac{x}{2}$ $\begin{matrix}\to \text{مقابل} \\ \to \text{وتر}\end{matrix}$

$\sin^{-1}$



$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$

اكمل الحل

$2\left(\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{\cancel{2}\sin\theta\cos\theta}{\cancel{2}}\right)$ ←

من المتطابقات بجيبهم

$2\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2}\cdot\frac{\sqrt{4-x^2}}{2} + C$

$= \int \sqrt{4-(2\sin\theta)^2}\cdot 2\cos\theta\,d\theta$

4 عامل مشترك

$= \int \sqrt{4-4\sin^2(\theta)}\cdot 2\cos(\theta)\,d\theta$

$= \int \sqrt{4(1-\sin^2(\theta))}\cdot 2\cos\theta\,d\theta$

متطابقة

$= \int 2\sqrt{1-\sin^2(\theta)}\cdot 2\cos\theta\,d\theta$

$= \int 4\sqrt{\cos^2(\theta)}\cdot\underbrace{\cos\theta}_{\text{ضرب}}\,d\theta$

$= 4\int \cancel{4}\cos^2(\theta)\,d\theta$ متطابقة $\frac{}{2}$

قوانين خارج

$= 2\int 1+\cos(2\theta)\,d\theta$

متطابقة

$= 2\left(\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2}\right) + C$

ارجع للفرض وبدل θ بـ x *

و 2 بروح مع ② المتطابقة

$$* \int \frac{dx}{\left(\sqrt{9-x^2}\right)^3} \rightarrow$$ لو بدون تكعيب $\sin^2$ حتكون $\rightarrow (9-x^2)^{\frac{3}{2}} \rightarrow$ [illegible]

عوض بالفرض و بدل

$x^2 = 9\sin^2(\theta)$

$x = \sqrt{9}\,\sin(\theta)$

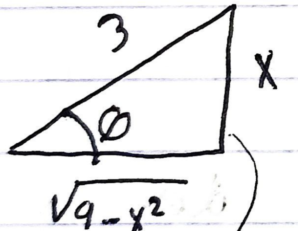
$x = 3\sin(\theta)$

$\sin\theta = \frac{x}{3} \rightarrow$ ركب عكس

[illegible]

$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)$

$dx = 3\cos(\theta)\, d\theta$



$$\tan\theta = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$\int \frac{3\cos(\theta)\, d\theta}{\left(\sqrt{9-9\sin^2(\theta)}\right)^3} \rightarrow$$ عامل مشترك و طلع [illegible] تكعيبها يطير ③

9

$$= \int \frac{3\cos(\theta)\, d\theta}{\left(3\sqrt{\cos^2(\theta)}\right)^3}$$

$$= \int \frac{\cancel{3}\cos(\theta)\, d\theta}{\overset{9}{\cancel{27}}\cos^{\cancel{3}\,2}(\theta)}$$

$$= \int \frac{1}{9\cos^2(\theta)}\, d\theta$$

$$= \int \frac{1}{9}\sec^2(\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{9}\tan(\theta) + C$$

$$= \frac{1}{9}\cdot\frac{x}{\sqrt{9-x^2}} + C$$

Moamen-B.Ashour

$$* \int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x^2}$$

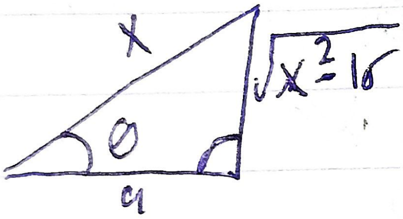
$x^2 = 16\sec^2(\theta)$

$x = \sqrt{16}\sec(\theta)$

$x = 4\sec(\theta)$

$dx = 4\sec(\theta)\tan(\theta)$

$\sec(\theta) = \frac{x \to \text{وتر}}{4 \to \text{مجاور}}$



ممكن اسئلة تعويض
عادي بجمين الطرفين
هاي ...
لحرب ميش الرياضيات
Moomen_B_Ashoor

طالع مشترك من الجذر ④

$$\int \frac{\sqrt{16\sec^2(\theta)-16}}{16\sec^2(\theta)} \cdot 4\sec(\theta)\tan(\theta)$$

متطابقة

$$= \int \frac{\cancel{4}\sqrt{\sec^2(\theta)-1} \cdot \cancel{4}\sec\cancel{(\theta)}\tan(\theta)}{\cancel{16}\sec^2(\theta)}$$

$$= \int \frac{\sqrt{\tan^{\cancel{2}}(\theta)}}{\sec(\theta)} \cdot \tan\theta \; d\theta$$

$$= \int \frac{\tan^2(\theta)}{\sec(\theta)} \, d\theta$$

متطابقة

$$= \int \frac{\sec^2(\theta)-1}{\sec(\theta)} \, d\theta$$

→ وزع المقام

$$= \int \sec(\theta) - \cos(\theta) \, d\theta$$

$$= \ln|\sec\theta + \tan(\theta)| - \sin\theta + C$$

$$\boxed{\ln\left|\frac{x}{4} + \frac{\sqrt{x^2-16}}{4}\right| - \frac{\sqrt{x^2-16}}{x} + C}$$

$$* \int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$$

أكمال المربع

① معامل x^2 موجب

X. Co

② $\pm \left(\frac{\text{معامل } x}{2}\right)^2$

مع ارقام

$$\boxed{1} = \left(\frac{2}{2}\right)^2$$

$= 1 + 2x - x^2$

$= -(x^2 - 2x - 1)$

$= -(x^2 - 2x - 1 + 1 - 1)$

$= -(x^2 - 2x + 1 - 2)$

$= -((x-1)^2 - 2)$

$$\boxed{= 2 - (x-1)^2}$$

Moamen B. Ashour

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2-(x-1)^2}} \longrightarrow \int \frac{\sqrt{2}\cos(\theta)\, d\theta}{\sqrt{2 - 2\sin^2(\theta)}}$$

$\sin^{-1}$

من البداية

عامل مشترك

② .

$$\int \frac{\cancel{\sqrt{2}}\cos(\theta)\, d\theta}{\cancel{\sqrt{2}}\sqrt{1-\sin^2}}$$ → متطابقة

$x - 1 = \sqrt{2}\sin(\theta)$

$dx = \sqrt{2}\cos(\theta)\, d\theta$

$(x-1)^2 = 2\sin^2(\theta)$

$$\int \frac{\cancel{\cos(\theta)}\, d\theta}{\cancel{\cos(\theta)}}$$

$$\boxed{= \theta + C}$$

$\sin(\theta) = \frac{x-1}{\sqrt{2}}$

$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)$

$$\boxed{= \sin^{-1}\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right) + C}$$

* The suitable trigmonetic substibion that

Solve the integrel $\int\sqrt{x^2+6x+5}\,dx$ is ?

بدو صيغة التكامل بدلالة θ فقط

اكمال المربع يا شباب!!

$9=\left(\frac{6}{2}\right)^2$

$\int (x+3)^2-4\,dx$

$=x^2+6x+5+9-9$

$=x^2+6x+9-4$

$=(x+3)^2-4$

$\downarrow$

$x+3=\sqrt{4}\sec(\theta)$

$x+3=2\sec(\theta)$

$$\boxed{x+3=2\sec(\theta)}$$ #

نفس جرم الانجليزي الي فوقه

* $\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+25}}\,dx$

$x=\sqrt{25}\tan(\theta)$

$x=5\tan(\theta)$

$x^2=25\tan^2(\theta)$

$dx=5\sec^2(\theta)\,d\theta$

الغي للشطب

$\int\frac{25\tan^2(\theta)}{\sqrt{25\tan^2(\theta)+\cancel{25}}}\cdot\cancel{5}\sec^2(\theta)\,d\theta$

$\int\frac{\cancel{25}\tan^2(\theta)}{\cancel{25}(\underset{\sim\sim}{\tan^2\theta+1})}\,5\sec^2(\theta)\,d\theta$

$\int\frac{5\tan^2(\theta)}{\cancel{\sec^2(\theta)}}\,5\cancel{\sec^2(\theta)}\,d\theta$

$$\boxed{\int 25\tan^2(\theta)\sec(\theta)}$$

#

الدرس: اليوم: التاريخ: / /

الكسور الجزئية

Mouaed

* Partial fraction *

$\sin^{-1} - \tan^{-1}$

→ Direct → $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = Ln|f(x)|+c$

→ partial fraction → $\int \frac{Poly}{Poly}dx =$

→ substitution → $\int \frac{f(x)}{g(x)}dx =$ → الكثيرة الحدود

* $\frac{-1}{2}\int \frac{-2x}{1-x^2}dx = -2Ln|1-x^2|+c$

* $\int \frac{4}{x^2+9}dx = \frac{4}{3}\tan^{-1}(\frac{x}{3})+C$

b^2-4ac → المميز

فإذا طلع القيمة سالبه

يعني لا يحلل

b^2-4ac

*partial fractions :-

خطوات الحل:

* $\int \frac{Poly_1}{Poly_2}\,dx$

1 نحلل المقام الى عوامله الممكنة

2 نختار الكسور الجزئية المناسبة حسب عوامل المقام

3 نوحد المقامات ونكتب معادلة البسط

4 نوجد قيمة الثوابت المجهولة

5 نعوض عن قيمة الثوابت في الكسور الجزئية ونكاملها مباشرة

ويعطيك العافية يفندم #

Moamen_B Ashour

$\boxed{1}\ ax+b \rightarrow \frac{A}{ax+b}$

$\boxed{2}\ ax^2+bx+c \rightarrow$ لا تحلل

[redacted] $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$

$\boxed{3}\ (ax+b)^n \rightarrow \frac{A}{ax+b} + \frac{B}{(ax+b)^2} + \frac{C}{(ax+b)^n}$

$\boxed{3}\ (ax^2+bx+c)^n \rightarrow \frac{Ax+b}{ax^2+bx+c} + \frac{Cx+D}{(ax^2+bx+c)^2} + \frac{Ex+F}{(ax^2+b+c)^n}$

الدرس: اليوم: التاريخ: /   /

* write the partial decompstion for the following

* $$\frac{1}{(x-4)^2(x^2+4)} \rightarrow \frac{A}{x-4}+\frac{B}{(x-4)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+4}$$

المميز سالب لا يحلل

* $$\frac{5x+3}{(x^2-1)(x^4-x)} \rightarrow \frac{5x+3}{(x-1)(x+1)(x)(x-1)(x^2+x+1)}$$

$(x-1)(x+1)$

ناخد مشترك

$x(x^3-1)$

$(x-1)(x^2-x+1$

$$\frac{5x+3}{(x-1)^2\,(x+1)(x^2+x+1)}$$

(x)

$$=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x}+\frac{D}{x+1}+\frac{Ex+F}{x^2+x+1}$$

* $$\frac{3}{x^4-x^2} \rightarrow \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{x+1}$$

$x^2(x^2-1)$

$x+1$ $x-1$

Moamen B Ashour

توحيد مقامات

poly

$$* \int \frac{x-4}{x^2+x-2}\,dx$$

poly

$$= \int \frac{\boxed{x-4}}{(x+2)(x-1)}\,dx$$ تحليل المقام $$= \int \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1}\,dx$$

توزيع

البسط ليساوى البسط

$$= \frac{A(x-1)+B(x+2)}{(x+2)(x-1)} \longrightarrow \boxed{x-4 = A(x-1)+B(x+2)}$$

رح نختار قيمة للأكس عشان
يجيب قيمة B/A ونختارهم
بذكاء اختار ارقام الي
تصفر المقام

$$x=1 \rightarrow -3 = 0+3B$$

$$\boxed{B=-1}$$

$$x=-2 \rightarrow -6 = -3A+0$$

$$\boxed{A=2}$$

$$= \int \frac{2}{x+2} + \frac{-1}{x-1}\,dx$$

$$\boxed{= 2\ln|x+2| - \ln(x-1) + c}\ \#\#$$

مؤمن

$$* \int \frac{x-1}{x^3+x^2}\,dx = \int \frac{x-1}{x^2(x+1)}\,dx$$

$$\frac{x-1}{x^2(x+1)} \rightarrow \int \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}$$

عشان نوحد مقامات لثلاث حدود
لازم نشوف كل حد نشوفنا معه
ونضرب فيه وبس والله
مش أحكام الأهلي

$$\frac{x-1}{x^2(x-1)} = \frac{A(x)(x+1) + B(x+1)\ C(x)^2}{x^2(x-1)}$$

معادلة اسيا $\rightarrow$ $(x-1) = A(x)(x+1) + B(x+1) + C(x)^2$

صفر المقام

$x = 0 \rightarrow -1 = 0 + B + 0 \rightarrow \boxed{B = -1}$

صفر المقام

$x = -1 \rightarrow -2 = 0 + 0 + C \rightarrow \boxed{C = -2}$

على كيفي

$x = 1 \rightarrow 0 = 2A + 2B + C \rightarrow \boxed{A = 2}$

عشان نعوض

$0 = 2A + 2(1) + (-2)$

تكامل مباشر

$$= \int \frac{2}{x} + \frac{-1x^{-2}}{x^2} + \frac{-2}{x+1}\,dx \rightarrow 2\ln|x| - \frac{x^{-1}}{1} + 2\ln|x+1| + C$$

$$* \int \frac{4x^2-1}{x^2-1}\,dx \rightarrow \int \frac{Poly_1}{Poly_2}\,dx$$

→ $Poly_1 < Poly_2$ → كسور جزئية

درجة المقام > درجة البسط

→ $Poly_1 \geq Poly_2$ → قسمة مطولة

درجة المقام ≤ درجة البسط

$$= \int \overset{\text{عادي}}{4} + \overset{\text{كسور جزئية}}{\frac{3}{x^2-1}}\,dx$$

$4x +$

$$\begin{array}{r|l} & 4 \\ \hline x^2-1 & 4x^2-1 \\ \ominus & 4x^2-4 \\ \hline & 0+3 \end{array}$$

$$\rightarrow \frac{3}{x^2-1} \rightarrow \frac{3}{(x-1)(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$$\frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{3}{(x-1)(x+1)}$$

الناتج + الباقي / المقسوم عليه

$$3 = A(x+1) + B(x-1)$$ → معادلة الربط

$$x=1 \rightarrow 3 = 2A + 0 \rightarrow \boxed{A = \frac{3}{2}}$$

$$x=-1 \rightarrow 3 = 0 + -2B \rightarrow \boxed{B = \frac{-3}{2}}$$

$$* \int \frac{\frac{3}{2}}{x-1} + \frac{\frac{-3}{2}}{x+1}\,dx \rightarrow \frac{3}{2}\ln|x-1| - \frac{3}{2}\ln|x+1| + C + 4x$$

من خطوة

$* \int \frac{3x^2+2x+5}{(x-1)(x^2+4)}\,dx$ Moamen-B-Ashour

$$\frac{3x^2+2x+5}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

لا تحلل

$$\frac{3x^2+2x+5}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{A(x^2+4)+Bx+C(x-1)}{(x-1)(x^2+4)}$$

معادلة البسط

$$3x^2+2x+5 = A(x^2+4)+Bx+C(x-1) \rightarrow$$

اختار أرقام للاس وعوض

$x=1 \rightarrow 3+2+5 = 5A+0 \rightarrow \boxed{A=2}$

$x=0 \rightarrow 0+0+5 = 4\overset{(2)}{A}+C(-1) \rightarrow \boxed{C=3}$

$x=-1 \rightarrow 3-2+5 = 5\overset{(2)}{A}+(-B+\overset{(3)}{C})(-2) \rightarrow \boxed{B=1}$

زي ما هي

وزع البسط

$$\int \frac{2}{x-1} + \frac{x+3}{x^2+4}\,dx \rightarrow \int \frac{2}{x-1} + \frac{x}{x^2+B} + \frac{3}{x^2+4}\,dx$$

$$\rightarrow 2\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x^4+4| + \frac{3}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

$$* \int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^{x}+2}\,dx \Rightarrow \int \frac{y^{\cancel{2}}}{y^{2}+3y+2}\,\frac{dy}{\cancel{y}} \qquad y = e^{x} \qquad \boxed{dx = \frac{dy}{e^{x}}}$$

طالعها ع

$$\int \frac{y}{(y+2)(y+1)}\,dy \rightarrow$$ كسور جزئية

$$\Rightarrow \frac{y}{(y+2)(y+1)} = \frac{A}{y+2} + \frac{B}{y+1}$$

$$\boxed{y = A(y+1) + B(y+2)} \rightarrow$$ مقارنه اسرع

$$x = -1 \rightarrow 0 + B = -1 \rightarrow \boxed{B = -1}$$

$$x = -2 \rightarrow -A + 0 = -2 \rightarrow \boxed{A = 2}$$

$$\int \frac{2}{y+2} + \frac{-1}{y+1}\,dx$$

مؤمن سامح عاشور

$$\Rightarrow 2\ln|y+2| - \ln|y+1| + c$$

$$\boxed{\Rightarrow 2\ln|e^{x}+2| - \ln|e^{x}+1| + C}$$

التاريخ: / / اليوم: الدرس:

قسمة طويلة

$\tan^{-1}$

$$* \int \frac{x^3+4}{x^2+4}\,dx \Rightarrow \int \frac{x^3}{x^2+4}\,dx + \int \frac{4}{x^2+4}\,dx$$

$$\Rightarrow \int x + \frac{-4x}{x^2+4}\,dx + \int \frac{4}{x^2+4}\,dx$$

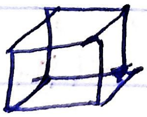
$$\boxed{\Rightarrow \frac{x^2}{2} + 2\ln|x^2+4| + 2\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c}$$

$$\begin{array}{r|l} & x \\ \hline x^2+4 & x^3 \\ & \ominus\ x^3+4x \\ \cline{2-2} & -4x \end{array}$$

Stop

Moanen_B_Ashour...

مؤمن بسام عاشور



تكاملات تحتي الكسري وجود جذر

* Rotionaking substitutm *

$* \int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx$

اشتقاق ضمني

$y=\sqrt{x+4}$

$y^2 = x+4$

$2y\frac{dy}{dx} = 1$

$\boxed{2y\,dy = dx}$

$x = y^2-4$

$\Rightarrow \int \frac{y}{\boxed{x}}\,2y\,dy$

$\Rightarrow \int \frac{2y^2}{y^2-4}\,dy$ كسور جزئية محتاجة مطولة

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline y^2-4 & 2y^2 \\ & 2y^2-8 \\ \hline & 8 \end{array}$$

$\Rightarrow \int \boxed{2} + \boxed{\frac{8}{y^2-4}}\,dy$ كسور جزئية

ذكرية

$\int \frac{8}{y^2-4}\,dy \Rightarrow \frac{A}{y-2} + \frac{B}{y+2}$

معادلة ابغ

$\boxed{8 = A(y+2)B(y-2)}$

$x=2 \rightarrow 8 = 4A+0 \rightarrow \boxed{A=2}$

$x=-2 \rightarrow 8 = 0+-4B \rightarrow \boxed{B=-2}$

$\int 2 + \frac{2}{y-2} + \frac{-2}{y+2}\,dy$

$\Rightarrow 2y + 2\ln|y-2| - 2\ln|y+2| + C$

$\boxed{2\sqrt{x+4} + 2\ln|\sqrt{x+4}-2| - 2\ln|\sqrt{x+4}+2| + C}$

$$* \int \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} \, dx$$

لما يكون عندك جذرين مختلفين
في الدالة ورح نوحد الجذور
عن طريقة الضرب

$y = \sqrt[6]{x}$

$y^6 = x$

$\boxed{6y^5 dy = 1 dx}$

$y^3 = \sqrt{y^6} = \sqrt{x}$

$y^2 = \sqrt[3]{y^6} = \sqrt[3]{x}$ *

$$* \int \frac{1}{y^3 - y^2} \times 6y \, dy$$

$$\int \frac{6y^{\cancel{5}\,3}}{\cancel{y^2}(y-1)} \, dy$$

$$6\int \frac{y^3}{y-1} \, dy$$

قسمة طويلة

$$6\int y^2 + y + 1 + \frac{1}{y-1} \, dy$$

$$6\left[\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} + y + \ln|y-1|\right] + c$$

$$\begin{array}{r|l} & y^2 + y + 1 \\ \hline y-1 & y^3 \\ & -\;y^3 - y^2 \\ \hline & y^2 \\ & y^2 - y \\ \hline & y \\ & -\;y - 1 \\ \hline & \boxed{1} \end{array}$$

~~[illegible]~~

$$\boxed{= 2\sqrt{x} + 3\sqrt[x]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6\ln|\sqrt[6]{x} - 1| + c}$$

مؤمن بسام عاشور

* Revision of calculus 1

Lim infinity : $\lim_{x\to\mp\infty} f(x)$ لازم تكون حافظهم

$c^{\infty}=\infty$ ، $e^{-\infty}=0$ ، $\sqrt{\infty}=\infty$ ، $\frac{N}{\mp\infty}=0$ ، $\frac{N}{0}=\pm\infty$

$\ln(\infty)=\infty$ ، $\ln(0^{+})=-\infty$ ، $\ln(0^{-})=DNE$ ، $\ln(e)=1$ ، $\ln(1)=0$

$\frac{\pm\infty}{\pm\infty} = !!$

$\xrightarrow{LR} \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = $ ،،،،،،، استخدم LR عندما يكون

مثال ln

$\xrightarrow{C.R} \lim_{x\to\infty} \frac{\text{أكبر قوة بالبسط مع المعامل}}{\text{أكبر قوة بالمقام مع المعامل}} = $ ،،،،،،

Moamen_B_Ashour

مؤمن بسام عاشور

12025 7363

$\tan^{-1}(\infty)=\frac{\pi}{2}$

$\tan^{-1}(-\infty)=-\frac{\pi}{2}$

$\tan^{-1}(1)=\frac{\pi}{4}$

$\tan^{-1}(0)=0$ $\tan^{-1}(-1)=-\frac{\pi}{4}$

الدرس: اليوم: التاريخ: / /

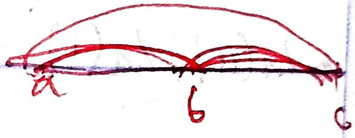
مراجعة بسيطة كالكولس 1

*propertes of definite integral

* $\int_a^b f(x)\,dx = g(x)\Big]_a^b = g(b) - g(a) = \boxed{}$ رقم

* $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

* $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$



* $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$

* $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$

ثابت

* $\int_0^2 \frac{dx}{4+x^2} = \frac{1}{\sqrt{4}}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{4}}\right)\Big]_0^2$

$\frac{1}{2}\left(\tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(0)\right)$

Moamena-B-Ashour

$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \boxed{\frac{\pi}{8}}$ #

* Idetrmiate forms: $(\infty^{\infty}, \infty^{0}, 0^{\infty}, 0^{0}, 1^{\infty})$

ركب Ln ونزل الاقتران تحت $g(x)$

$$* \lim_{x\to} f(x)^{g(x)} \longrightarrow \lim_{x\to} g(x)\ln(f(x)) \longrightarrow LR \rightarrow e^{\boxed{}}$$

exp حط

$$* \lim_{x\to 0^+} (1+\sin(18x))^{\frac{1}{3x}} \Rightarrow (1+\sin(0))^{\frac{1}{0}} = (1)^{\infty}$$

ممكن بدون تحويلها عادي بشتق اقتران الس اقتران

ركب Ln و امشي بالموضوع الكل ☺

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{3x}\ln(1+\sin(18x)) \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+\sin(18x))}{3x} = \frac{\ln(1)}{0}$$

$$= \frac{0}{0}!\ \overset{LR}{\Longrightarrow} \frac{\frac{\cos(18x)(18)}{1+\sin(18)}}{3} \Rightarrow \frac{\frac{\cos(0)(18)}{1+(\sin(0)}}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{18}{1+0}}{3} = 6 \Rightarrow \boxed{e^{6}}$$

$$*\lim_{x\to0^+}(1+\sin(4x))^{\cot(x)}$$

$$\lim_{x\to0}\cot(x)\ln(1+\sin(4x))$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin(4x))}{\cancel{\frac{1}{\cot(x)}}\ \tan(x)}=\frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \xrightarrow{L.R}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{\cos(4x)(4)}{1+\sin(4x)}}{\sec^2(x)}$$

$$=\frac{\frac{4}{1+0}}{1}=4$$

$$\Rightarrow \boxed{e^4}$$ ~~#~~ Momo

***Rule** قاعدة

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{b}{x}\right)=\boxed{e^b}$$

عشان القاعدة شرط تبل ثلاث شروط

1) لازم داخل النهاية [1]

2) الإشارة بينهم جمع

3) المقام نفس القوة => المقام يلحق القوة

$$*\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^x=e^5$$

فيلفه سالب تحايل

$$*\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{x}\right)=\boxed{e^{-4}}$$

وتعمله ③

$$*\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\overset{*}{3}2}{3x}\right)^{3x}=\boxed{e^6}\rightarrow$$ ضربته فوق

$$*\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{2x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{2x}{2}}\right)^x=\boxed{e^{-\frac{1}{2}}}\rightarrow$$ ممكن بدل ضربه عادي وتغير إشارة

عكس

بتوزيع البسط على المقام *

$$*\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x}+\frac{2}{x}\right)^{x}\Rightarrow\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}\Rightarrow\boxed{e^{2}}$$

$$*\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+6}\right)^{x}\Rightarrow\left(\frac{x+6}{x}\right)^{-x}\Rightarrow\left(\frac{x}{x}+\frac{6}{x}\right)^{-x}=\left(1+\frac{6}{x}\right)^{-x}$$

$$=\left(1+\frac{-6}{-x}\right)^{-x}\Rightarrow\boxed{e^{-6}}$$

اقلب الكسر وغير اشارة الاس

$$*\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x-3}\right)^{x}\Rightarrow\left(\frac{\frac{x}{x}+\frac{4}{x}}{\frac{\cancel{x}}{x}-\frac{3}{x}}\right)\Rightarrow\left(\frac{1+\frac{4}{x}}{1-\frac{3}{x}}\right)^{x}$$

$$\Rightarrow\frac{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{x}}{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}}=\frac{e^{4}}{e^{-3}}=\boxed{e^{7}}$$

في السؤال هاد أول اشي
بناخذ عامل مشترك بعدين
بصير مثل الشكل هاد عادي
ونوزع النهاية عليهم وحل عادي
وبس والله يا مهندسة ☺

$$*\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-1}\right)^{2x}\Rightarrow\left(\frac{2x-1}{2x}\right)^{-2x}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{2x}{2x}-\frac{1}{2x}\right)^{-2x}\Rightarrow\left(1+\frac{-1}{2x}\right)^{-2x}\Rightarrow\boxed{e^{1}}\Rightarrow\boxed{e}$$

تكاملات معتلة

الأخ لغة عربية ☺

* أشكاله هي

1. $\pm\infty$
2. صفر المقام
3. اصفار ما داخل LA
4. اصفار ما داخل الجذر زوجي
5. كل التكاملات محدودة

* لما كان تواجه المشكلات هاي

1. الحد العلوي ← يسار
2. الحد السفلي ← يمين ← دولة
3. ضمن الفترة يعني Domaine
4. واذا تواجدت بالجامعة الاسلامية اعوقرة !!!!

Moamen B. Ashour

* Improper Integral *

صفر المقام هو $\boxed{0}$ وليس من الفترة

$$*\int_1^{\infty}\frac{1}{x}\,dx=$$

$$\lim_{a\to\infty}\int_1^{a}\frac{1}{x}\,dx\to\ln|x|\Big]_1^{a}$$

$$\to\ln(a)-\overset{\text{صفر}}{\ln(1)}=\ln(a)$$

$$\lim_{a\to\infty}\ln(a)=\infty\ \#$$

* ايشو اللي جا بالسؤال يا مؤمن

فورت المشكلة وليه ∞

فحطيت حرف منه وهو ⓐ مكانها

وركبت نهاية وحلت المشكلة

تتحول لها وعملت تكامل

عادي حبس كدا

② صفر مقام مشكلة

$$* \int_1^2 \frac{dx}{x-2} \rightarrow \lim_{a\to 2^-} \int_1^a \frac{dx}{x-2}$$

لينه جديدة اتجاه
د ② وعلى اي اساس
على أساس إنو فيه حد علوي
بالتالي خط سالب واذا
فلطي خط موجب بس والله

$$\Rightarrow \int_1^a \frac{dx}{x-2} = \ln|x-2|\Big]_1^a$$

صفر

$$\Rightarrow \ln|a-2| - \ln|1-2| = \ln|a-2|$$

$$\lim_{a\to 2^-} \ln|a-2| = -\infty \ \#$$

$$* \int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx \longrightarrow$$

نعوض بدل

صفر مقام

$y=\sqrt{x}$

$dx = \frac{dy}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$

$dx = 2\sqrt{x}\,dy$

$$\Rightarrow \int_a^1 \frac{e^y}{\cancel{y}} 2\cancel{y}\,dy \Rightarrow 2e^y \Big] \ 2e^{\sqrt{x}}\Big]_a^1$$

$$\Rightarrow 2e^{\sqrt{1}} - 2e^{\sqrt{a}} = 2e - 2e^{\sqrt{a}}$$

$$\lim_{a\to 0^+}(2e - 2e^{\sqrt{a}}) = 2e - 2(1) = 2e - 2 \ \#$$

Moamen.B_Ashour

مطرقعام (1)

$* \ ① \int_0^3 \frac{1}{x-1}\,dx =$ رمية نجزئة

$= \int_0^{①} \frac{1}{x-1}\,dx + \int_{①}^3 \frac{1}{x-1}\,dx$

$\Rightarrow \lim_{a \to 1^-} \int_0^a \frac{1}{x-1}\,dx + \lim_{b \to 1^+} \int_b^3 \frac{1}{x-1}\,dx$

$\int_0^a \frac{1}{x-1}\,dx = \ln|x-1| \Big]_0^a \Rightarrow \ln|a-1| - \ln|0-1| = \ln(a-1)$

$\lim_{a \to 1^-} \ln|a-1| = -\infty$ #

$* \int_b^3 \frac{1}{x-1}\,dx = \ln|x-1| \Big]_b^3$

$\rightarrow \ln(3-1) - \ln(b-1)$

Moamen B Ashour

$\lim_{b \to 1^+} \ln(2) - \ln(b-1)$

$\ln(2) - (-\infty) = \ln(2) + \infty = \infty$ #

$$* \int_{-\infty}^{0} e^{4x}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} e^{4x}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \left.\frac{e^{4x}}{4}\right]_{a}^{0}$$

$$\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{e^{0}}{4}-\frac{e^{4a}}{4}\right) = \frac{1}{4}-\frac{e^{-\infty}}{4} = \frac{1}{4}-0 = \boxed{\frac{1}{4}}$$

رح نجزأ التكامل ، ناخذ اي عدد رقم صفر وكمل الحل

لهين رح افصل أعسكلتين

$$* \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+1} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$$

$$\lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{dx}{x^2+1} + \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} \frac{dx}{x^2+1}$$

$$\lim_{a\to-\infty} \left.\tan^{-1}(x)\right]_{a}^{0} + \lim_{b\to\infty} \left.\tan^{-1}(x)\right]_{0}^{b}$$

$$\lim_{a\to-\infty} \left(\tan^{-1}(0)-\tan^{-1}(a)\right) + \lim_{b\to\infty} \left(\tan^{-1}(b)-\tan^{-1}(0)\right)$$

$$-\tan^{-1}(-\infty)+\tan^{-1}(\infty) = -\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2} = \boxed{\pi}$$

حُط معلم ع مشكلة

$$* \int_0^2 \frac{dx}{x-2}$$

$$\lim_{a\to 2^-} \int_1^a \frac{dx}{x-2} \to \lim_{a\to 2^-} \ln|x-2| \Big]_1^a$$

$$\lim_{a\to 2^-} \ln|a-2| - \overset{0}{\cancel{\ln|1-2|}} = \ln|a-2|$$

$$\lim_{a\to 2^-} \ln(a-2)$$

$$\ln|-0.00001| \to \ln|0^+| = \overset{DNE}{-\infty}$$

$$* \int_0^1 x \ln(x)\, dx = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 x \ln(x)$$ → أجزاء

$$\int x \ln(x)$$

$u = \ln(x)$ $dv = x$

$du = \frac{1}{x}$ $v = \frac{x^2}{2}$

$$= \frac{x^2}{2}\ln(x) - \int \frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{\cancel{x}}\right) dx$$

$$\frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}\Big]_a^1$$

$$\lim_{a\to 0^+} \left(\frac{1}{2}\overset{0}{\ln(1)} - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{a^2}{2}\ln(a) - \frac{a^2}{4}\right)$$

$$\lim_{a\to 0^+} -\frac{1}{4} + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2}\ln(a)$$

$0 * -\infty$

نجرب حل السؤال

$$\lim_{a\to 0^+} \frac{\ln(a)}{\frac{2}{a^2}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{LH} \frac{\frac{1}{a}}{\frac{-2 \cdot 2a}{a^4}}$$

$$= \frac{a^2}{4} = \frac{0^+}{4} = \boxed{0}$$

الاجابة النهائية $\boxed{-\frac{1}{4}}$

الدرس: اليوم: التاريخ: /   /

$$* \int_{5}^{\infty} \frac{2\,dx}{x^2-1} = \lim_{a\to\infty} \int_{5}^{a} \frac{2\,dx}{x^2-1} \rightarrow$$ كسور جزئية

$$\int \frac{2\,dx}{x^2-1} = \int \frac{2\,dx}{(x-1)(x+1)} \quad \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

أكمل الحل في الصفحة التالية

$$\boxed{2 = A(x+1) + B(x-1)} \rightarrow$$ معادلة البعد

$$x=1 \rightarrow 2 = 2A - 0 \rightarrow \boxed{A = 1}$$

$$x=-1 \rightarrow 2 = 0 + -2B \rightarrow \boxed{B = -1}$$

$$\int \frac{1}{x-1} + \frac{-1}{x+1}\,dx$$

$$\Rightarrow \left[\ln|x-1| - \ln|x+1| \Big|_{5}^{a}\right]$$

ممكن اعلا عمة

$$\lim_{a\to\infty} \left(\ln|a-1| - \ln|a+1|\right) - \left(\ln|5-1| - \ln|5+1|\right)$$

~~$\lim_{a\to\infty} \ln|a-$~~

بدل كل هاد يالي كان هون
الطرح لعمة رح يصير أسهل بكتير

أكمل الحل بالطريقة الثانية في الصفحة القادمة

الدرس: اليوم: التاريخ: / /

$$\lim_{a\to\infty} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| \Bigg]_{5}^{0}$$

$$\to \lim_{a\to\infty} \ln\left|\frac{a-1}{a+1}\right| - \ln\left|\frac{4}{\cancel{6}}\right|^{\frac{2}{3}} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{CR} \frac{a}{a} = \boxed{1}$$

$$\ln(1) - \ln\left(\frac{2}{3}\right) = 0 - \ln\left(\frac{2}{3}\right) = \boxed{-\ln\left(\frac{2}{3}\right)}$$

فُلعى الحل الصح كدا

Moamen.B.Ashour

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{conv} \pm \text{conv} = \text{conv} \\ &\text{div} \pm \text{conv} = \text{div} \\ &\text{div} + \text{div} = \text{div} \end{aligned}} \longrightarrow \text{المتقارب والمتباعد}$$

$$\text{div} - \text{div} = ???$$

مش معلوم

تذكرني بالاستاتيكا الأخ

***Example** . Detrmine whether the integral isconvergent or divergent ?*

السؤال بيحكي انو هل ناتج التكامل متقارب او متباعد

① $\int_0^3 \frac{1}{x-1}\,dx$ دولة

$\rightarrow \pm\infty$. DNE div

$\rightarrow$ عدد . عجة Conv

$$= \int_0^1 \frac{1}{x-1}\,dx + \int_1^3 \frac{1}{x-1}\,dx$$

$$= \lim_{a\to 1^-} \int_0^a \frac{1}{x-1}\,dx + \lim_{b\to 1^+} \int_b^3 \frac{1}{x-1}\,dx$$

$$= \lim_{a\to 1^-} \ln|x-1| \Big]_0^a + \lim_{b\to 1^+} \ln|x-1| \Big]_b^3$$

$$\lim_{a\to 1^-} \ln|a-1| - \cancel{\ln|\overset{b}{0}-1|} + \lim_{b\to 1^+} \ln|2| - \ln|b-1|$$

تعويض

$$\ln(0^+) + \ln(2) - \ln(0^+)$$

$$-\infty + \ln(2) + \infty \Rightarrow \text{Divergent}$$

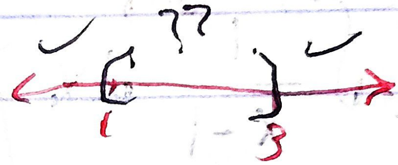
مؤمن بسام عاشور

لآخر بيت الاسانكا

*Example .. Detrmine all values of taht makes the integral ..... convergnt

تجيلك هو لازم يكون معتاد

$$*\int_1^3 \frac{1}{x-\boxed{p}}\,dx \longrightarrow (1,3)$$



$$\int_1^3 \frac{1}{x-1}\,dx \Rightarrow$$

$$=\lim_{a\to 1^+}\int_a^3 \frac{1}{x-1}\,dx$$

$$\lim_{a\to 1^+} \ln|x-1|\Big]_a^3 =$$

$$\lim_{a\to 1^+} L(2)-\ln(a-1)$$

$$=\ln(2)+\infty = \infty \ \underline{\text{div}}$$

لازم تعمل كل الخطوات
للحد الافرابي خطوة ③
وسنشوف شويه

وقفلنا كدا شابتر 8
والحمد لله
Moamen_B_Ashour
مؤمن بسام عاشور

Divergent $p[1,3]$

Convergent $p \in R-[1,3]$ / $(-\infty,1)\cup(3,\infty)$

مؤمن بسام عاشور

Moamen B Ashour

وَتَشَاءُ أَنْتَ مِنَ الأَمَانِي نَجْمَةً
وَيَشَاءُ رَبُّكَ أَنْ يُنَالِكَ الْقَمَرَ

PC Paper Industries Co.®
شركة المصنوعات الورقية م ج م

PC Paper Industries Co.®
شركة المصنوعات الورقية م ج م

White Horse

A5 148 X 210 MM
WOOD FREE PAPER 56 GSM