



RCM Engineering Team " Branch of the Islamic University "

Chapter 4 "part 2"

for : Control Systems – EELE 3360



Preparation: Eng. Hadil Jamal Matter

Assistant teacher at the Islamic University of Gaza

The second semester of the academic year 2020 - 2021

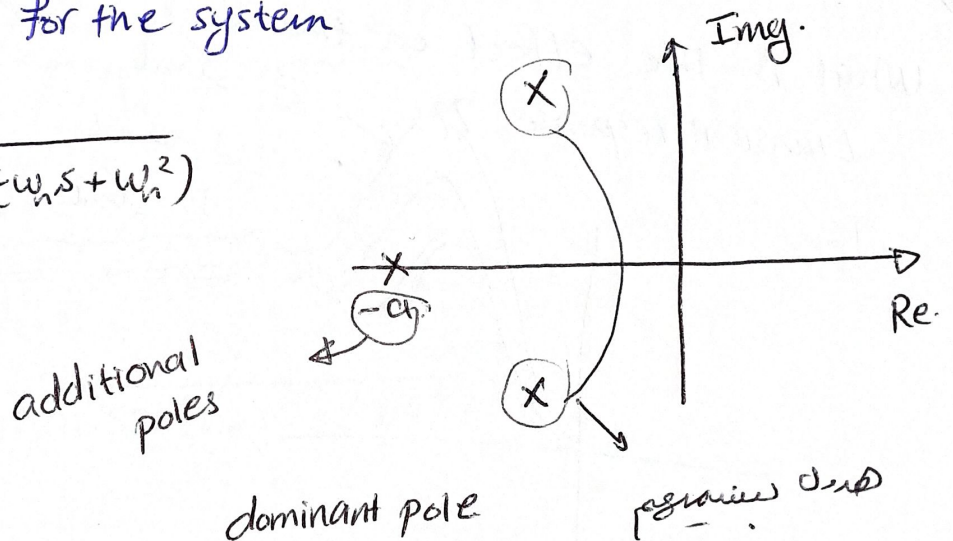
← في المبرزة السابقة ذكرنا ان Time response لا system له يكون نظام
من الدرجة الأولى، الثانية، وله ما يكون عن Zeros (one or two poles يكون and no Zeros)

← ورحبنا كيف حسب ان specification الخاصة بهذا النوع

← لو كان عن النظام أكبر من الدرجة الثانية ولو كان في عن Zeros
يكون الذي مختلف نتائج كما بقوانين السابقة عن أحسب specifications
الخاصة به ان system

* We will be study the effect of adding poles at specific point on the time response for the system

$$G(s) = \frac{a}{(s+a)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$



← لو كانت هذه pole (الخاصة قريبة من dominant poles يكون لها تأثير
على النظام لو كانت بعيدة عنها مقدار 5 أضعاف (يعني أكبر 5 أضعاف من (real part
بمقدار 5 من موجودة بينهما ومن حيزها أي تأثير وبمقدار 5 من
second order - لكنه لو كانت قريبة من dominant poles يكون لها
تأثير يالذي لها رتبة أخرى وقوانين أخرى.

"بالفكر عن الأفعال، محل الأفعال له، للرسوم،
صورة الأفعال"

* System Response With Zeros :-

$$G(s) = \frac{(s+a)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

← عند (جبانة) Zeros له صفة 2 لاحظ أنو التأثير حوله على وقت overshoot كلما كانت Zeros بعيدة عن dominant poles يكون التأثير على overshoot قليل كلما كانت بعيدة أكثر تقريباً يكون التأثير معدوم أو اسيراً لا يذكر .

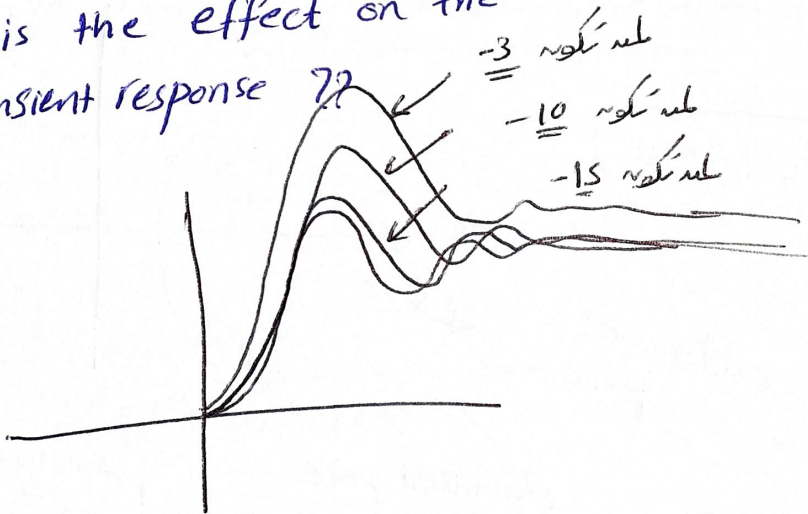
Example # // If you have 2 poles at $(-1, \pm j2.8)$ if we add Zeros at ?

- a) -3
- b) -10
- c) -15

"وانه حيقوا للسلم فاجعظا
توقوا على الله انه هو الرافع
الحليم"
سورة الأنفال -

What is the effect on the transient response ??

Sol:



"اننا ونصل هنا (نزل) أكثر
السمع العليم"

Example

من صياح الذكر

Find the step response of each of the transfer function :-

$$\textcircled{1} T(s) = \frac{24.542}{s^2 + 4s + 24.542}$$

$$R(s) = \frac{1}{s}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{24.542}{s^2 + 4s + 24.542} = \frac{24.542}{s(s^2 + 4s + 24.542)} = C(s)$$

$$C(s) = \frac{24.542}{s(s^2 + 4s + 24.542)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+2-j4.532)} + \frac{B^*}{(s+2+j4.532)}$$

$$A = \frac{24.542 \cancel{s}}{s(s^2 + 4s + 24.542)} \Big|_{s=0} = \boxed{1}$$

$$B = \frac{(24.542)(s+2-j4.532)}{s(s+2-j4.532)(s+2+j4.532)} \Big|_{s=-2+j4.532} =$$

$$\boxed{0.546 / 156.187^\circ}$$

$$B^* = \boxed{0.546 / -156.187^\circ}$$

$$C(s) = \frac{1}{s} + \frac{0.546 / 156.187^\circ}{s+2-j4.532} + \frac{0.546 / -156.187^\circ}{s+2+j4.532}$$

$$\boxed{C(t) = 1 + 1.09 e^{-2t} \cos(4.532t + 156^\circ)}$$

$$T(s) = \frac{73.626}{(s+3)(s^2 + 4s + 24.542)}$$

$$C(s) = \frac{73.626}{s(s+3)(s+2-j4.532)(s+2+j4.532)}$$

$$C(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+3)} + \frac{C}{(s+2-j4.532)} + \frac{C^*}{(s+2+j4.532)}$$

$$A = \frac{(73.626) \cancel{s}}{s(s+3)(s^2 + 4s + 24.542)} \Big|_{s=0} = \boxed{1}$$

$$B = \frac{(73.626)(s+3)}{s(s+3)(s^2 + 4s + 24.542)} \Big|_{s=-3} = \boxed{-1.139}$$

$$C = \frac{(73.626)(s+2-j4.532)}{s(s+3)(s+2-j4.532)(s+2+j4.532)} \Big|_{s=-2+j4.532}$$

$$= \boxed{0.3533 / 78.63^\circ}$$

[3]

انتي (جولان) قسم (صورة)
ابنا (تفصيل) دعاء
سورة البصير

$$C^* = 0.3533 \angle -78.63^\circ$$

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{1.139}{s+3} + \frac{0.3533 \angle 78.63^\circ}{(s+2-j4.532)} + \frac{0.3533 \angle -78.63^\circ}{s+2+j4.532}$$

$$C(t) = 1 - 1.139e^{-3t} + 0.707e^{-2t} \cos(4.532t + 78.63^\circ) \quad \#$$

$$T(s) = \frac{245.42}{(s+10)(s^2+4s+24.542)}$$

Sol:-

$$C(s) = \frac{245.42}{s(s+10)(s^2+4s+24.542)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+10)} + \frac{C}{s+2-j4.532} + \frac{C^*}{s+2+j4.532}$$

$$A = \frac{245.42}{(s+10)(s^2+4s+24.542)} \Big|_{s=0} = \boxed{1}$$

$$B = \frac{245.42(s+10)}{s(s+10)(s^2+4s+24.542)} \Big|_{s=-10} = \boxed{-0.29}$$

$$C = \frac{245.42(s+2-j4.532)}{s(s+10)(s+2-j4.532)(s+2+j4.532)} \Big|_{s=-2+j4.532} = \boxed{0.5944 \angle 126.656^\circ}$$

$$C^* = 0.5944 \angle -126.656^\circ$$

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{0.29}{s+10} + \frac{0.5944 \angle 126.656^\circ}{s+2-j4.532} + \frac{0.5944 \angle -126.656^\circ}{s+2+j4.532}$$

$$C(t) = 1 - 0.29e^{-10t} + 1.1889e^{-2t} \cos(4.532t + 126.656^\circ) \quad \#$$

* Time domain solution of state equations:—

⇒ another technique for solving the state equations, we solve the equations directly in the time domain.

We have:

$$\dot{x}(t) = \underbrace{Ax(t)}_{\text{Homogeneous part}} + \underbrace{Bu(t)}_{\text{Forcing part}}$$

Solving the homogeneous part:—

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = Ax(t)$$

$$x(t) = e^{At} x(0)$$

$$x(t) = \phi(t) \cdot x(0)$$

$$\Rightarrow \phi(t) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1} \{ (sI - A)^{-1} \}$$

or $sX(s) - x(0) = AX(s)$

$$X(s) (sI - A) = x(0)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1} \cdot x(0)$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ (sI - A)^{-1} \} \cdot x(0)$$

ϕ : state transition matrix (represent the free response of the system)

State transition matrix is matrix that satisfies the linear homogeneous state equation

$$e^{At} = 1 + At + \frac{1}{2} A^2 t^2 + \dots$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1} x(0) + (sI - A)^{-1} Bu(s)$$

Taking the Laplace inverse:—

الحل العام، الذي يمثل
"عند التفاعل"
"مع القوة الخارجة"

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\overbrace{(\underline{sI-A})^{-1}}^{\phi(s)} \cdot x(0) + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \underbrace{(\underline{sI-A})^{-1}}_{\phi(s)} \cdot B U(s) \right\} \right]$$

$$x(t) = \phi(t) \cdot x(0) + \int_0^t \phi(t-\tau) \cdot B u(\tau) d\tau$$

$\Downarrow$
 Natural Zero
 input response

$\Downarrow$
 Forced Zero state
 Response

Laplace transform solution of state equations :-

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$Y = Cx + Du$$

نأخذ Laplace transform للمعادلة

$$\Rightarrow sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

$$(sI - A)X(s) = x(0) + BU(s)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1} x(0) + (sI - A)^{-1} \cdot BU(s)$$

$$X(s) = \left(\frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} \right) \cdot (x(0) + BU(s))$$

$$\Rightarrow Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C \left[\frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} \right] B + D$$

$$= \frac{C \text{adj}(sI - A) B + D \det(sI - A)}{\det(sI - A)}$$

The roots of denominator are the poles of the system.

The system poles = eigenvalues = $\det(sI - A) = 0$

Example # Given the system represented in state space.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -24 & -26 & -9 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

إذا سألني عيادي
عن فاني وأولادي
أنا فاني وأولادي
دعوة الدعاء
سورة البقرة

* Solve the preceding state equation and obtain the output for the given exponential input

* Find the eigenvalues and the system poles.

Sol:-

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -24 & -26 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 24 & 26 & s+9 \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s^2 + 9s + 26}{s^3 + 9s^2 + 26s + 24} & \frac{s+9}{s^3 + 9s^2 + 26s + 24} & \frac{1}{s^3 + 9s^2 + 26s + 24} \\ \frac{-24}{s^3 + 9s^2 + 26s + 24} & \frac{s^2 + 9s}{s^3 + 9s^2 + 26s + 24} & \frac{s}{s^3 + 9s^2 + 26s + 24} \\ \frac{-24s}{s^3 + 9s^2 + 26s + 24} & \frac{-26s - 24}{s^3 + 9s^2 + 26s + 24} & \frac{s^2}{s^3 + 9s^2 + 26s + 24} \end{bmatrix}$$

$$x(s) = (sI - A)^{-1} [x(0) + Bu(s)]$$

$$\frac{\begin{bmatrix} s^2 + 9s + 26 & s+9 & 1 \\ -24 & s^2 + 9s & s \\ -24s & -26s - 24 & s^2 \end{bmatrix}}{s^3 + 9s^2 + 26s + 24} \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \right)$$

$$x(s) = \begin{bmatrix} \frac{s^3 + 10s^2 + 37s + 29}{(s+1)(s^3 + 9s^2 + 26s + 24)} \\ \frac{2s^2 - 21s - 24}{(s+1)(s^3 + 9s^2 + 26s + 24)} \\ \frac{2s^3 - 21s^2 - 24s}{(s+1)(s^3 + 9s^2 + 26s + 24)} \end{bmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix}$$

$$y = Cx(s) + Du(s)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

8.5

$$x_1(s) = \frac{s^3 + 10s^2 + 37s + 29}{(s+1)(s^3 + 9s^2 + 26s + 24)}$$

$$x_2(s) = \frac{2s^2 - 21s - 24}{(s+1)(s^3 + 9s^2 + 26s + 24)}$$

$$x_3(s) = \frac{2s^3 - 21s^2 - 24s}{(s+1)(s^3 + 9s^2 + 26s + 24)}$$

$$y = Cx(s) + Du(s)$$

$$C = [1 \ 1 \ 0] \quad , \quad D = 0$$

$$y = [1 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \\ x_3(s) \end{bmatrix}$$

$$y = \frac{s^2 + 11s + 5}{s^3 + 9s^2 + 26s + 24} = \frac{A}{(s+4)} + \frac{B}{(s+3)} + \frac{C}{(s+2)}$$

$$A = \frac{(s+4)(s^2 + 11s + 5)}{(s+4)(s+3)(s+2)} \Big|_{s=-4} = \boxed{-11.5}$$

$$B = \frac{(s+3)(s^2 + 11s + 5)}{(s+4)(s+3)(s+2)} \Big|_{s=-3} = \boxed{19}$$

$$C = \frac{(s+2)(s^2 + 11s + 5)}{(s+4)(s+2)(s+3)} \Big|_{s=-2} = \boxed{-65}$$

"أنا وأنا يا وعينا على الله ولا تنزلنا"
 يوم القيامة إنك لا تحلف بالعباد
 بل عذرنا

"وانه ليخففوا فاني انا عباد
 ليؤي الوهوه بين الرب
 "سألت مرتفعا"
 صوة الالف

$$y(s) = \frac{-23/2}{s+4} + \frac{19}{(s+3)} - \frac{6.5}{(s+2)}$$

$$y(t) = (-11.5 e^{-4t} + 19 e^{-3t} - 6.5 e^{-2t}) u(t)$$

b) Find the eigenvalues and the system poles.

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 24 & 26 & s+9 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A) = s^3 + 9s^2 + 26s + 24$$

$$s^3 + 9s^2 + 26s + 24 = 0$$

$$(s+2)(s+3)(s+4) = 0$$

$$\text{poles} \Rightarrow \boxed{s=-2}, \boxed{s=-3}, \boxed{s=-4}$$

#

علاقة بين $\det(sI - A)$ و $\det(sI - B)$ إذا كان

الـ System ← Stable أو لا

← غير قابل للاستقرار الـ System ← stable

"(أقرب للناس حياء)" هم في غلبة
مروءة
"صوت الأبناء"

Example #1 $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t}$

$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x, x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Find the time domain solution for $x(t), y(t)$

Sol:-

$$x(t) = \phi(t) \cdot x(0) + \int_0^t \phi(t-\tau) \cdot B u(\tau) \cdot d\tau$$

$$\phi(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ (sI - A)^{-1} \}$$

$$sI - A \Rightarrow \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -2 \\ 2 & s+5 \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} = \frac{\begin{bmatrix} s+5 & +2 \\ -2 & s \end{bmatrix}}{s^2 + 5s + 4}$$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s+5}{s^2 + 5s + 4} & \frac{2}{s^2 + 5s + 4} \\ \frac{-2}{s^2 + 5s + 4} & \frac{s}{s^2 + 5s + 4} \end{bmatrix}$$

$$\phi(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ (sI - A)^{-1} \} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} e^{-4t} - \frac{1}{3} e^{-t} & \frac{2}{3} e^{-t} - \frac{2}{3} e^{-4t} \\ \frac{2}{3} e^{-4t} - \frac{2}{3} e^{-t} & \frac{4}{3} e^{-4t} - \frac{1}{3} e^{-t} \end{bmatrix}$$

~ بتكامل لا P.F
نفصل تكامل الآلة الكومبيوتر
لنوفر الوقت فمجرداً من هذا
الفرع من الأسئلة

~ قال اعطاني
مجرداً

تابع

"وما منع الناس ان يؤمنوا ان طاعتهم طاعت
الله سبحانه وتعالى انما يؤمنوا بالله
واليوم لا يفرقون"

$$\phi(t-\tau) = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}e^{-4(t-\tau)} & -\frac{1}{3}e^{-(t-\tau)} & \frac{2}{3}e^{-(t-\tau)} & -\frac{2}{3}e^{-4(t-\tau)} \\ \frac{2}{3}e^{-4(t-\tau)} & -\frac{2}{3}e^{-(t-\tau)} & \frac{4}{3}e^{-4(t-\tau)} & -\frac{1}{3}e^{-(t-\tau)} \end{bmatrix}$$

$$Bu(\tau) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-2\tau} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-2\tau} \end{bmatrix}$$

$$\phi(t) \cdot x(0) = \begin{bmatrix} \frac{3}{4}e^{-4t} & -\frac{1}{3}e^{-t} & \frac{2}{3}e^{-t} & -\frac{2}{3}e^{-4t} \\ \frac{2}{3}e^{-4t} & -\frac{2}{3}e^{-t} & \frac{4}{3}e^{-4t} & -\frac{1}{3}e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{-4t} \\ \frac{4}{3}e^{-4t} - \frac{1}{3}e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$\phi(t-\tau) \cdot Bu(\tau) = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}e^{-4(t-\tau)} & -\frac{1}{3}e^{-(t-\tau)} & \frac{2}{3}e^{-(t-\tau)} & -\frac{2}{3}e^{-4(t-\tau)} \\ \frac{2}{3}e^{-4(t-\tau)} & -\frac{2}{3}e^{-(t-\tau)} & \frac{4}{3}e^{-4(t-\tau)} & -\frac{1}{3}e^{-(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-2\tau} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\frac{2}{3}e^{-(t-\tau)} - \frac{2}{3}e^{-4(t-\tau)} \right) e^{-2\tau} \\ \left(\frac{4}{3}e^{-4(t-\tau)} - \frac{1}{3}e^{-(t-\tau)} \right) e^{-2\tau} \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{-4t} \\ \frac{4}{3}e^{-4t} - \frac{1}{3}e^{-t} \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} \left(\frac{2}{3}e^{-(t-\tau)} - \frac{2}{3}e^{-4(t-\tau)} \right) e^{-2\tau} \\ \left(\frac{4}{3}e^{-4(t-\tau)} - \frac{1}{3}e^{-(t-\tau)} \right) e^{-2\tau} \end{bmatrix} d\tau$$

نیز می توان نوشت

$$x(t) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{-4t} \\ \frac{4}{3}e^{-4t} - \frac{1}{3}e^{-t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_0^t \frac{2}{3}e^{-(t-\tau)} \cdot e^{-2\tau} d\tau - \int_0^t \frac{2}{3}e^{-4(t-\tau)} e^{-2\tau} d\tau \\ \int_0^t \frac{4}{3}e^{-4(t-\tau)} e^{-2\tau} d\tau - \int_0^t \frac{1}{3}e^{-(t-\tau)} \cdot e^{-2\tau} d\tau \end{bmatrix}$$

الخطوة الأخيرة تنوع لحساب ناتج، بكامل مع ملاحظة أن الشكل
البسيطة t ، ليس τ ، ثم نقوم بتجميع المصنوعة لإيجاد
شدة $x(t)$.

← حساب ناتج الشكل كالتالي عنصر من المصنوعة :

$$\frac{2}{3} \int_0^t e^{-t} \cdot e^{\tau} e^{-2\tau} d\tau \Rightarrow \frac{2}{3} e^{-t} \int_0^t e^{-\tau} d\tau \Rightarrow \frac{2}{3} e^{-t} \left(\frac{e^{-t} - 1}{-1} \right)$$

$$= \frac{2}{3} e^{-t} (1 - e^{-t}) \Rightarrow \boxed{\frac{2}{3} e^{-t} - \frac{2}{3} e^{-2t}}$$

$$-\frac{2}{3} \int_0^t e^{-4t} \cdot e^{4\tau} e^{-2\tau} d\tau \Rightarrow -\frac{2}{3} \int_0^t e^{-4t} \cdot e^{2\tau} d\tau \Rightarrow -\frac{2}{3} e^{-4t} \left(\frac{e^{2t} - 1}{2} \right)$$

$$= \boxed{-\frac{1}{3} e^{-2t} + \frac{1}{3} e^{-4t}}$$

$$\frac{4}{3} \int_0^t e^{-4t} \cdot e^{4\tau} \cdot e^{-2\tau} d\tau \Rightarrow \frac{4}{3} \int_0^t e^{-4t} \cdot e^{2\tau} d\tau = \frac{4}{3} e^{-4t} \left[\frac{e^{2t} - 1}{2} \right]$$

$$= \boxed{\frac{2}{3} e^{-2t} - \frac{2}{3} e^{-4t}}$$

$$-\frac{1}{3} \int_0^t e^{-t} e^{\tau} e^{-2\tau} d\tau \Rightarrow -\frac{1}{3} \int_0^t e^{-t} e^{-\tau} d\tau \Rightarrow -\frac{1}{3} e^{-t} \left(\frac{e^{-t} - 1}{-1} \right)$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3} e^{-t} (1 - e^{-t}) \Rightarrow \boxed{-\frac{1}{3} e^{-2t} + \frac{1}{3} e^{-t}}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{-4t} \\ \frac{4}{3}e^{-4t} - \frac{1}{3}e^{-t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-4t} \\ \frac{2}{3}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-4t} - \frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{-4t} \\ \frac{4}{3}e^{-4t} - \frac{1}{3}e^{-t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{-t} - e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-4t} \\ \frac{1}{3}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-4t} + \frac{1}{3}e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-4t} - e^{-2t} \\ \frac{2}{3}e^{-4t} + \frac{1}{3}e^{-2t} \end{bmatrix} \quad t \geq 0 \quad \# \text{ هو المطلوب}$$

النتيجة: يمكن بدلا من استخدام convolution (الطريقة الأولى)

$$\mathcal{L}^{-1} \{ \phi(s) \cdot BU(s) \} \quad \Leftarrow \text{formula هاتين}$$



⊙ يجب أن يكون لدينا شكل

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-4t} - e^{-2t} \\ \frac{2}{3}e^{-4t} + \frac{1}{3}e^{-2t} \end{bmatrix} + 0$$

$$y(t) = \left[\frac{2}{3}e^{-4t} + \frac{1}{3}e^{-2t} \right]$$

هو المطلوب

«لينا ولا تخافنا بالانظمة لنا به» واغفر
عنا واغفر لنا وارحمنا زينتنا مولانا
ناصرتنا مع الحق الكائن
سورة البقرة

هنا

problem #1

عبد السلام بن عبد الرحمن

For the state equation and initial state vector shown below, where $u(t)$ is a unit step, find the state transition matrix and then solve for $x(t)$.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -6 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \phi(t) \cdot x(0) + \int_0^t \phi(t-\tau) \cdot Bu(\tau) d\tau$$

$$\phi(t) = e^{-1} \{ (sI - A)^{-1} \}$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 8 & s+6 \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} = \frac{\begin{bmatrix} s+6 & 1 \\ -8 & s \end{bmatrix}}{s^2 + 6s + 8}$$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s+6}{s^2+6s+8} & \frac{1}{s^2+6s+8} \\ \frac{-8}{s^2+6s+8} & \frac{s}{s^2+6s+8} \end{bmatrix}$$

$$\phi(t) = L^{-1} \left\{ (sI - A)^{-1} \right\} = \begin{bmatrix} -e^{-4t} + 2e^{-2t} & -\frac{1}{2}e^{-4t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ 4e^{-4t} - 4e^{-2t} & 2e^{-4t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

P.F. 11 quint list.

+6

علی رضی اللہ عنہ
کاتب بشارت
حضرت سید و سید
حضرت
عقلا
(iv)

$$\Phi(t-\tau) = \begin{bmatrix} -e^{-4(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} & -\frac{1}{2}e^{-4(t-\tau)} + \frac{1}{2}e^{-2(t-\tau)} \\ 4e^{-4(t-\tau)} - 4e^{-2(t-\tau)} & 2e^{-4(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix}$$

$$Bu(\tau) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{s} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t) \cdot x(0) = \begin{bmatrix} -e^{-4t} + 2e^{-2t} & -\frac{1}{2}e^{-4t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ 4e^{-4t} - 4e^{-2t} & 2e^{-4t} - e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -e^{-4t} + 2e^{-2t} \\ 4e^{-4t} - 4e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t-\tau) \cdot Bu(\tau) = \begin{bmatrix} -e^{-4(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} & -\frac{1}{2}e^{-4(t-\tau)} + \frac{1}{2}e^{-2(t-\tau)} \\ 4e^{-4(t-\tau)} - 4e^{-2(t-\tau)} & 2e^{-4(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t-\tau) \cdot Bu(\tau) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{-2(t-\tau)} & -\frac{1}{2}e^{-4(t-\tau)} \\ 2e^{-4(t-\tau)} & -e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix}$$

$$\int_0^t \Phi(t-\tau) Bu(\tau) d\tau = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{-2t} \int_0^t e^{2\tau} d\tau - \frac{1}{2}e^{-4t} \int_0^t e^{4\tau} d\tau \\ 2e^{-4t} \int_0^t e^{4\tau} d\tau - e^{-2t} \int_0^t e^{2\tau} d\tau \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{-2t} \cdot \frac{(e^{2t} - 1)}{2} - \frac{1}{2}e^{-4t} \cdot \frac{(e^{4t} - 1)}{4} \\ 2e^{-4t} \cdot \frac{(e^{4t} - 1)}{4} - e^{-2t} \cdot \frac{(e^{2t} - 1)}{2} \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \phi(t) \cdot x(0) + \int_0^t \phi(t-\tau) \cdot Bu(\tau) \cdot d\tau$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} - \frac{7}{8}e^{-4t} + \frac{7}{8}e^{-2t} \\ \frac{7}{2}e^{-4t} - \frac{7}{2}e^{-2t} \end{bmatrix} \quad \# \text{ صحیح جواب}$$

$$y(t) \Rightarrow$$

من مخرج السؤال نعلم أن $y(t)$ هي إشارة مطلوبة بالسؤال (😊)

Example #1

Example 7 | Consider the state equation:-

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Sol: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} = \frac{\begin{bmatrix} s+3 & +1 \\ -2 & s \end{bmatrix}}{s^2 + 3s + 2}$$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{s^2+3s+2} & \frac{1}{s^2+3s+2} \\ \frac{-2}{s^2+3s+2} & \frac{s}{s^2+3s+2} \end{bmatrix}$$

$$\phi(t) = L^{-1}((sI - A)^{-1}) = \begin{bmatrix} -e^{-2t} + 2e^{-t} & -e^{-2t} + e^{-t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{-t} & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$\phi(t-\tau) = \begin{bmatrix} -e^{-2(t-\tau)} + 2e^{-(t-\tau)} & -e^{-2(t-\tau)} + e^{-(t-\tau)} \\ 2e^{-2(t-\tau)} - 2e^{-(t-\tau)} & 2e^{-2(t-\tau)} - e^{-(t-\tau)} \end{bmatrix}$$

$$\phi(t-\tau) \cdot Bu(\tau) = \begin{bmatrix} -e^{-2(t-\tau)} + 2e^{-(t-\tau)} & -e^{-2(t-\tau)} + e^{-(t-\tau)} \\ 2e^{-2(t-\tau)} - 2e^{-(t-\tau)} & 2e^{-2(t-\tau)} - e^{-(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -e^{-2(t-\tau)} + e^{-(t-\tau)} \\ 2e^{-2(t-\tau)} - e^{-(t-\tau)} \end{bmatrix}$$

$$\int_0^t \phi(t-\tau) \cdot Bu(\tau) d\tau = \begin{bmatrix} -e^{-2t} \int_0^t e^{2\tau} d\tau + e^{-t} \int_0^t e^{\tau} d\tau \\ 2e^{-2t} \int_0^t e^{2\tau} d\tau + -e^{-t} \int_0^t e^{\tau} d\tau \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -e^{-2t} \cdot \frac{(e^{2t} - 1)}{2} & e^{-t} (e^t - 1) \\ 2e^{-2t} \cdot \frac{(e^{2t} - 1)}{2} & -e^{-t} (e^t - 1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-2t} & 1 - e^{-t} \\ 1 - e^{-2t} & -1 + e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix} \quad t \geq 0$$

$$x(t) = \phi(t) \cdot x(0) + \int_0^t \phi(t-\tau) \cdot Bu(\tau) d\tau$$

$$\phi(t) \cdot x(0) = \begin{bmatrix} -e^{-2t} + 2e^{-t} & -e^{-2t} + e^{-t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{-t} & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{bmatrix} x(0)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} -e^{-2t} + 2e^{-t} & -e^{-2t} + e^{-t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{-t} & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{bmatrix} x(0) + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix} \quad t \geq 0$$

قابل

فريق RCM الهندسي

﴿ رَبَّنَا تَقَبَّلْ مِنَّا إِنَّكَ أَنْتَ السَّمِيعُ الْعَلِيمُ ﴾



فريق RCM الهندسي



rcm.engineering.team



+972599262638

