

chapter 5 : Reduction of multiple subsystems.

Model Representation:-

- ① Transfer function Model (ch 2)
- ② State space Model (ch 3)
- ③ Block diagram and signal flow graph Model (ch 5)

Model :- النموذج هي طريقة للتعبير عن أي نظام بشكل رياضي
Model Representation :- تمثيل النموذج، هناك أكثر من طريقة للتعبير عن أي نظام بشكل رياضي

TF $\leftrightarrow$ Freq. domain (s) لنمذج بطريقة نقل

SS $\leftrightarrow$ time domain (t)

BD $\leftrightarrow$ Freq. domain (s)

يكون فيه نظام بلوك و نقل
تعبير الكسور TF

SFG $\leftrightarrow$ Freq. domain (s)

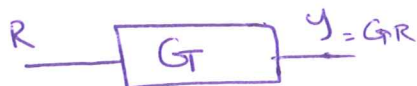
يتم تبسيط الكسور TF

Mason's Rule

The Interconnection types:-

- ① cascade form (product $*$)
- ② parallel form (algebraic summation)
- ③ feedback form

Block diagram (BP)

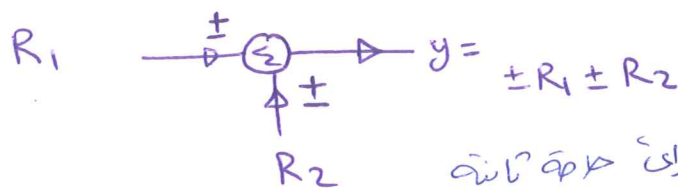


$$GT = \frac{Y}{R}$$

في هذا التتابع
عزني BD بتوصيل
عصية متجاوزاتها
لا يتم كل واحد
الكل عبارة
عن المدخل والمخرج المطلوب.

Block diagram consists of:-

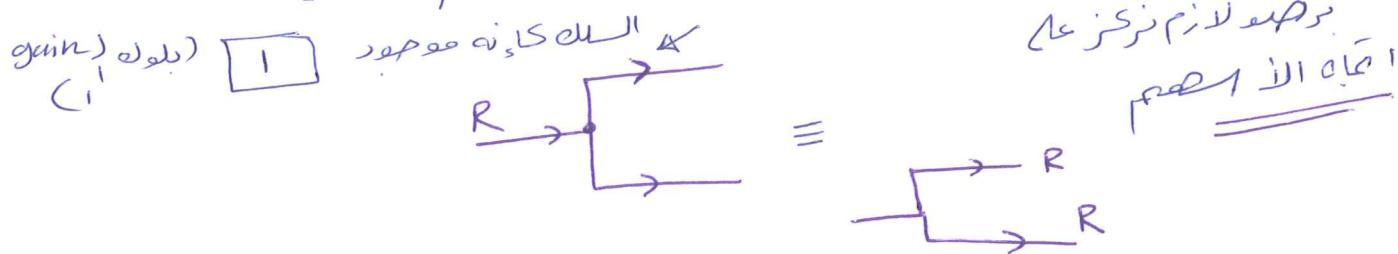
① Summation junction



في ال summation أدي حارة ثانية
في هذا ال summation لابد ان يكون له
كل الاشارة (signals) الداخلة ايجابية مع بعض حارة اخرى كالاتي

ومما ياتي الاشارة الحارة من ال summation

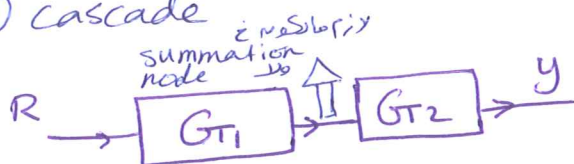
② pick off points (نقطة توزيع)



برصه لازم نركز على
اقدام ال summation

BD interconnection:-

① cascade



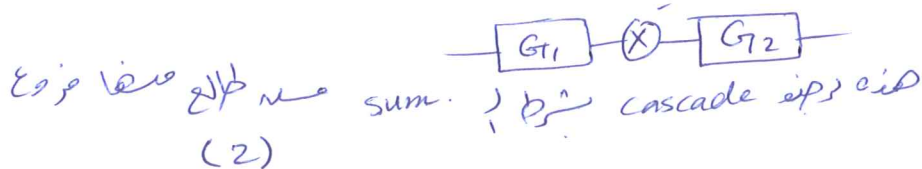
ال cascade نقل عملية اشارة في ال summation node
مخرج ال summation الاول هو مدخل ال summation الثاني
لا summation ولا pick up point لو كان في ال summation
حركته (movement)

$$TF = \frac{y}{R} = GT_1 * GT_2$$



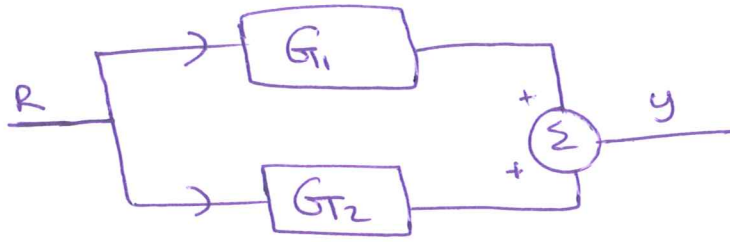
الاول ال summation
الثاني

مدخله لو كان عند

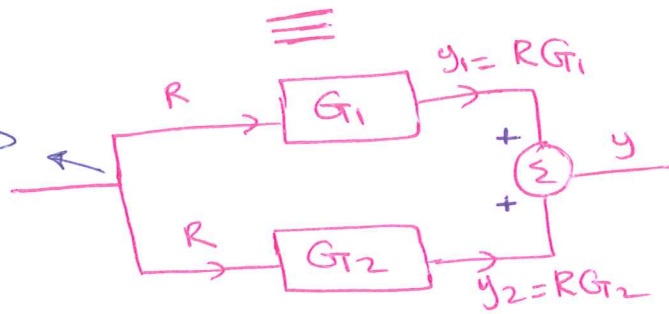


هذه ال summation cascade
من ال summation
(2)

② parallel (توازي يعني ما يشبه مع بعضنا) نفس الاتجاه لا هم



هذه نقطة كايضا
مقاس
R (...)
ورحلنا الى
الفروع



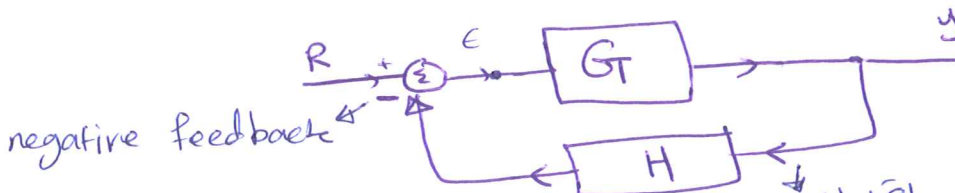
$$y = y_1 + y_2 = RG_1 + RG_2$$

$$\frac{y}{R} = G_1 + G_2$$



يعني جمع حركي

③ feedback Form :- انهم حادثة في
closed loop ما قنا و سقا و قولا و نه



$$E = R - Hy$$

$$y = EG$$

$$E = R - HEG$$

$$E = \frac{R}{1+GH} \rightarrow \text{Error signal}$$

$$y = EG \rightarrow E = \frac{y}{G}$$

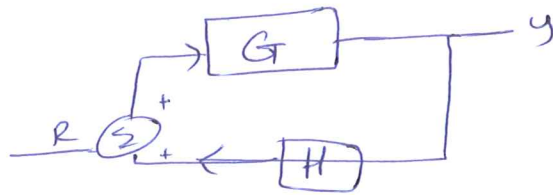
$$\frac{y}{G} = \frac{R}{1+GH} \rightarrow \frac{y}{R} = \frac{G}{1+GH}$$

(3)

اتجاه نقطة الراجعة
(Feedback) من الخرج الى المدخل
اي اني الا هم على
الاتجاه

GT دائما هو
البلوك الي انا
من المدخل الى الخرج
Feedback هو H
اذا هو من الخرج
الى المدخل

في حال positive feedback



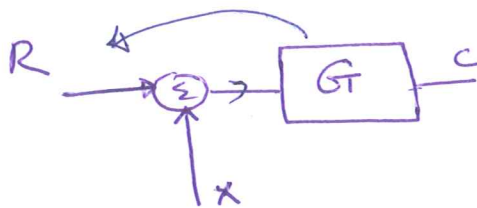
$$\frac{Y}{R} = TF = \frac{G}{1 - GH}$$

علامة إشارة ال feedback

الآن لو كان عندي BD لكن لا يمكن انه التوصل الى الأساسية
 feedback, parallel, cascade بروح مباشرة ببساطة كل شيء قانونه
 ولازم انتبه للاشياء.
 لكن لو لا يمكن وجود توصلة جديدة من هنا، لتوصلة، الأساسية كوجود
 node او summ.
 هناك cascade ليس بينهم
 فنعمل تحريك للبلوكات حيث يصبح (توصلة قبل التوصلة، المتعارف عليها
 Block Diagram

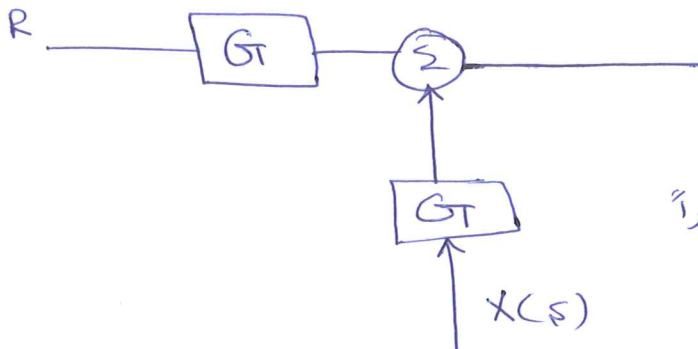
Block diagram Reduction Movement: - Movement)

① More left past summing junctions



طرحاً التحريك من اليمين
 للتحريك اوجه التحرك لليسار
 لليمين

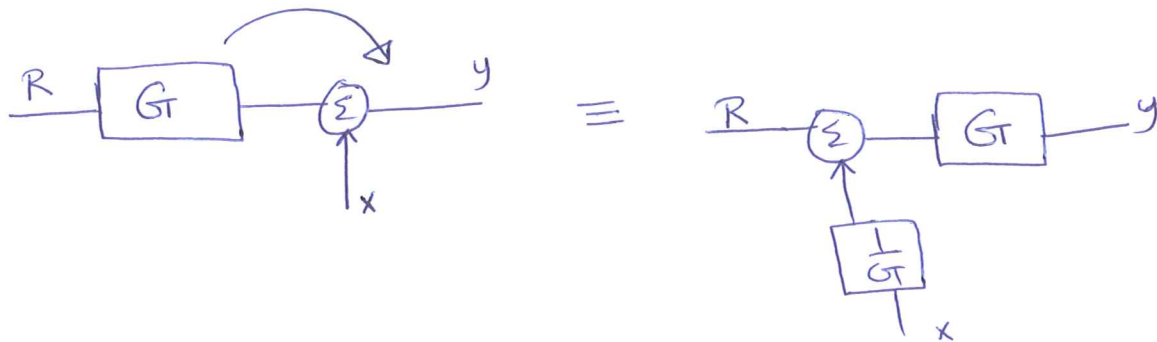
≡



تكنيصة هذه اللازمة
 لو بي اترك بلوك للتحريك لليسار
 عند احسنه
 المرفوض بينكون بكل
 الحيل (اللون) الموضوعة على
 هذه الاشياء من بيننا لعلها لفرغ منها

② Move Right past summing junction.

نقل نقطة الجمع من اليمين إلى اليسار



تأثيره: الطريقة السابقة :-
 1- في حال كنت تريد إزاحة إشارة الإدخال من اليمين إلى اليسار، فافعل ذلك في الفرع الذي يدخله من اليمين.

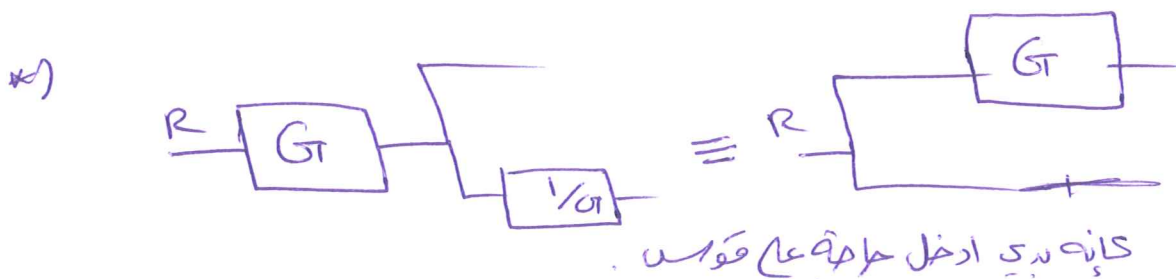
2- في حال كنت تريد إزاحة إشارة الإدخال من اليسار إلى اليمين، فافعل ذلك في الفرع الذي يخرج منه إشارة (direct from input to output) ولباق بقسم على الـ G وطرحا بينتان من فرعه.

③ Move Right or left past pick point junction

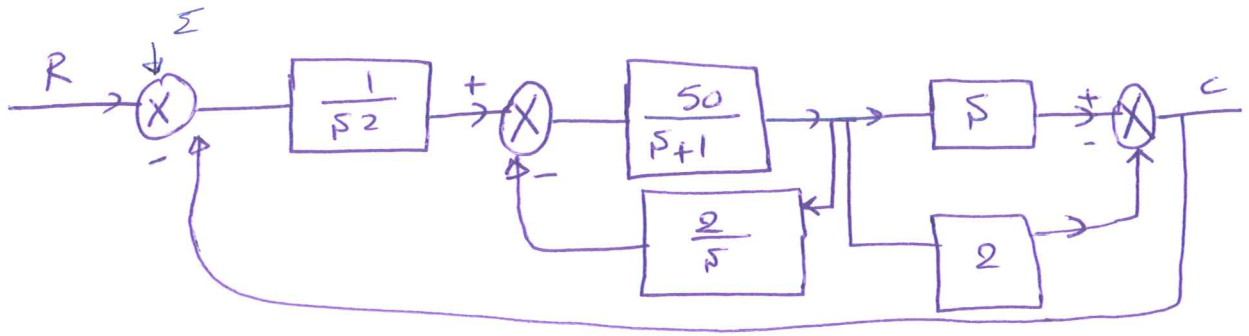
النقل كائنا ما كان



$$R(1+G) \equiv RG(1 + \frac{1}{G})$$



5.1 Reduce the block diagram shown below to a single TF = C/R use the Block diagram Reduction.

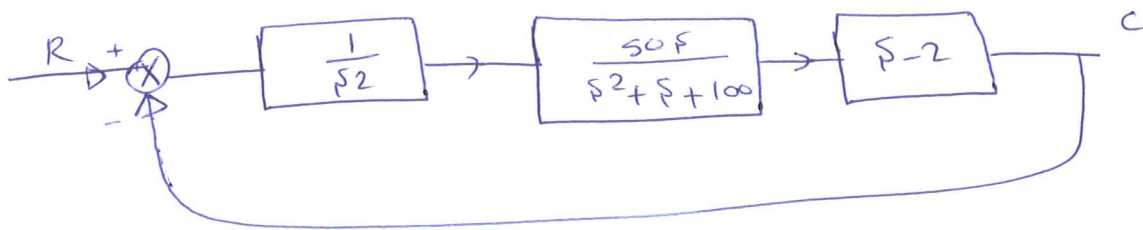


2 and s parallel

$s-2$

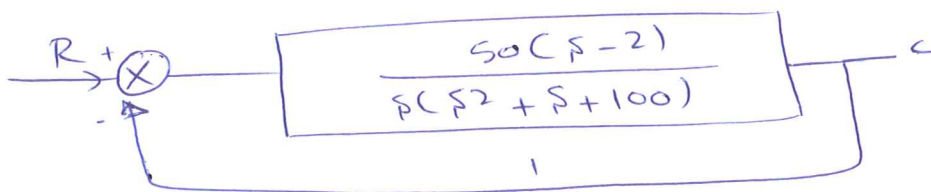
$\frac{50}{s+1}$ and $\frac{2}{s}$ feed back

$$\frac{\frac{50}{s+1}}{1 + \frac{50}{s+1} \cdot \frac{2}{s}} = \frac{50s}{s^2 + s + 100}$$



$\frac{1}{s^2}$ and $\frac{50s}{s^2 + s + 100}$ and $s-2$ all cascade

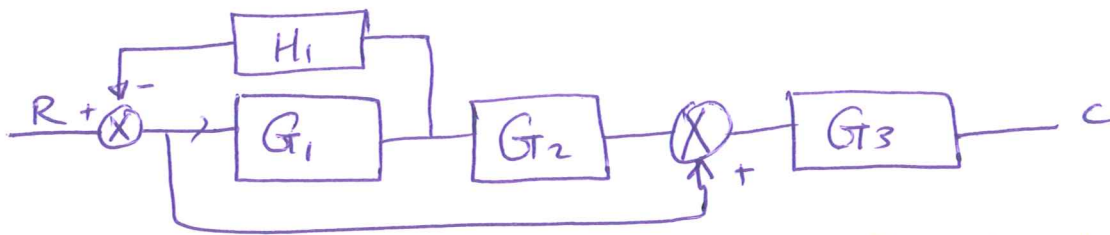
$$\frac{50s}{s^2 + s + 100} \cdot \frac{1}{s^2} \cdot (s-2) = \frac{50(s-2)}{s(s^2 + s + 100)}$$



unity negative feedback

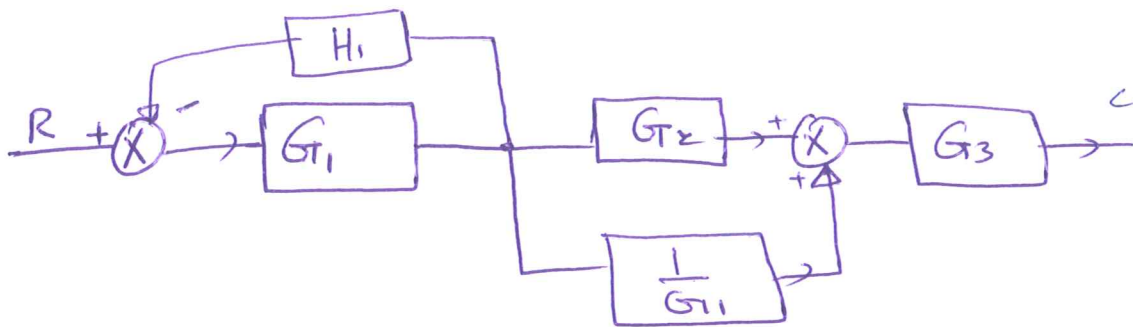
$$T = \frac{C}{R} = \frac{50(s-2)}{s(s^2 + s + 100)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{50(s-2)}{s(s^2 + s + 100)}} = \frac{50(s-2)}{s^2 + s^2 + 150s + 100}$$

5.2 find the closed-loop TF function. $T = C/R$ for the system shown below, using block diagram reduction.



نلاحظ ان النظام يحتوي على مسارات متوازية cascade , parallel , feedback
لذلك لا بد من فصل كل جزء.

لنقوم بتحويل G_1 الى اشارة معاكسة.



G_2 and $\frac{1}{G_1}$ parallel $(\frac{1}{G_1} + G_2)$

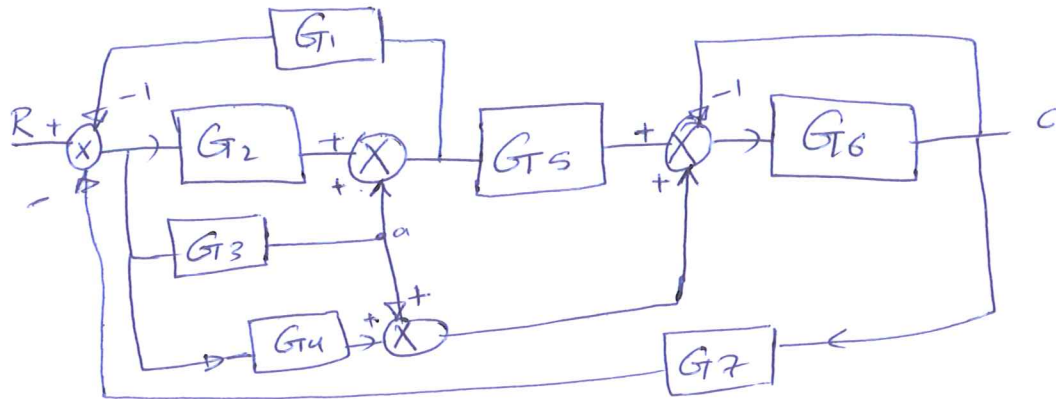
H_1 and G_1 feedback $\frac{G_1}{1 + G_1 H_1}$



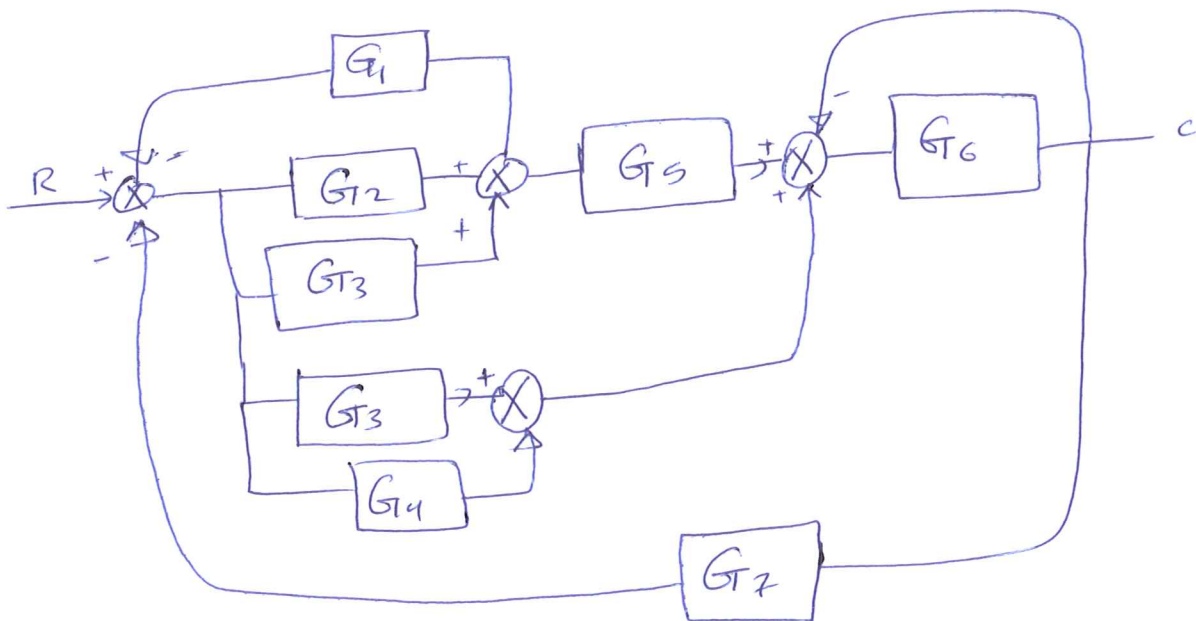
Now all cascade

$$\left(\frac{G_1}{1 + G_1 H_1} \right) \left(\frac{1}{G_1} + G_2 \right) (G_3) = \frac{(G_1 G_2 + 1) G_3}{(1 + G_1 H_1)}$$

5.3 Find the equivalent tf, $T=C/R$, for the system shown below



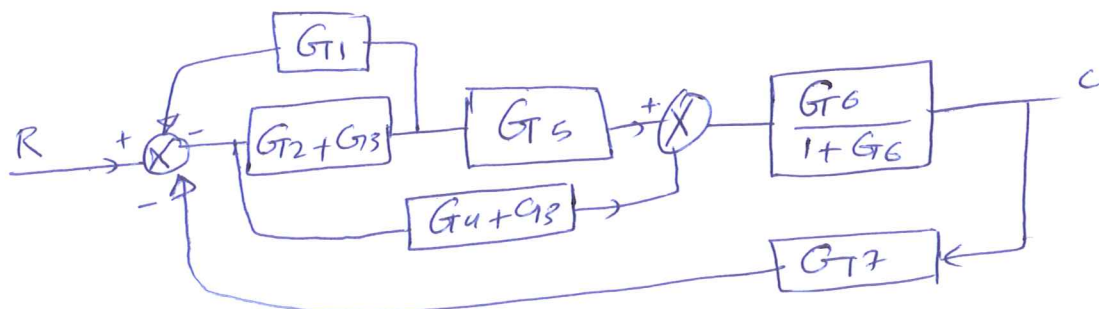
Move G_3 from the node a then split it



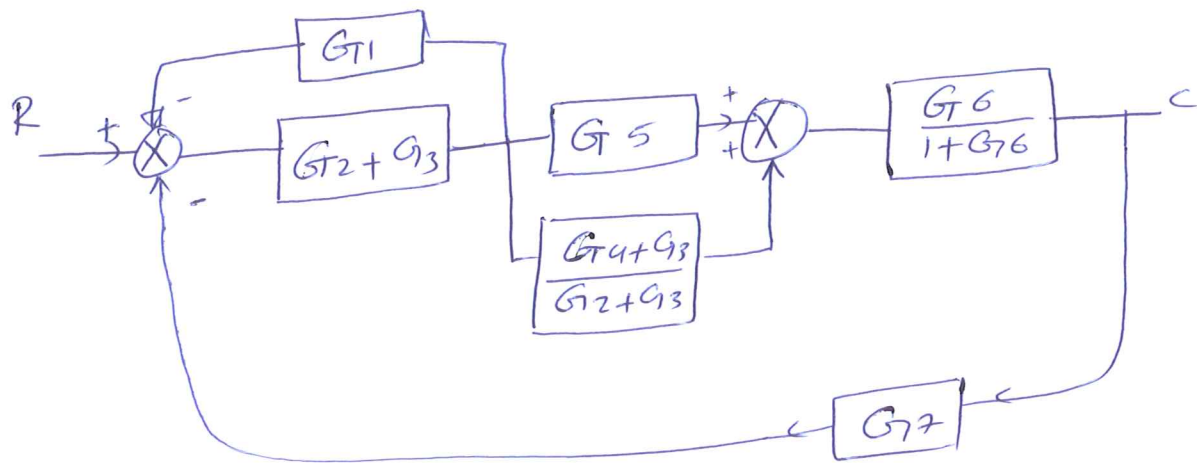
G_2 and G_3 parallel $G_2 + G_3$

G_3 and G_4 parallel $G_3 + G_4$

G_6 and 1 feedback $\frac{G_6}{1 + G_6}$

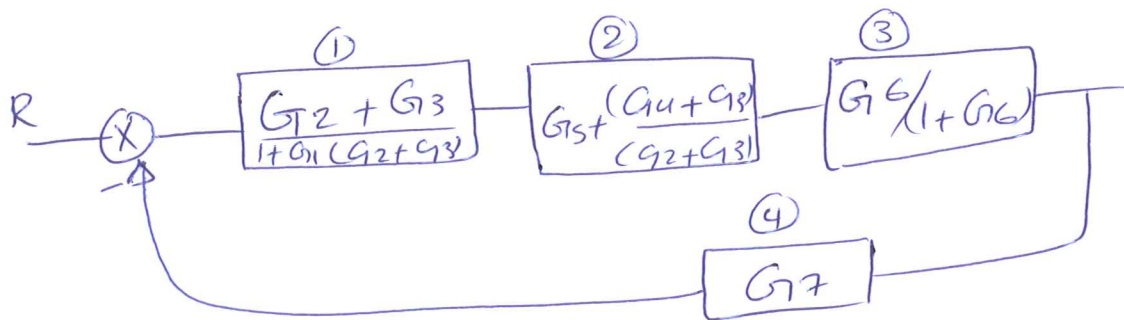


push $(G_2 + G_3)$ to the left past the pick point



G_1 and $G_2 + G_3$ feedback $\frac{G_2 + G_3}{1 + G_1(G_2 + G_3)}$

G_5 and $\frac{G_4 + G_3}{G_2 + G_3}$ parallel $G_5 + \left(\frac{G_4 + G_3}{G_2 + G_3} \right)$



1 and 2 and 3 cascade $① * ② * ③ =$

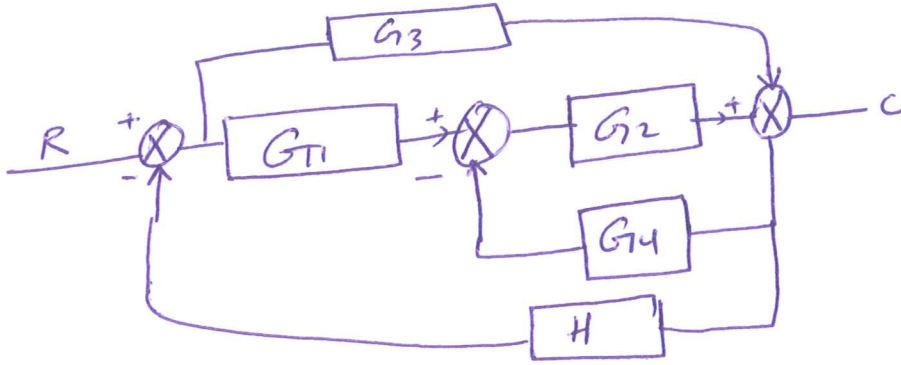
$$= \frac{G_2 + G_3}{1 + G_1(G_2 + G_3)} \cdot \left[G_5 + \left(\frac{G_4 + G_3}{G_2 + G_3} \right) \right] \cdot \left(\frac{G_6}{1 + G_6} \right)$$

$= M$

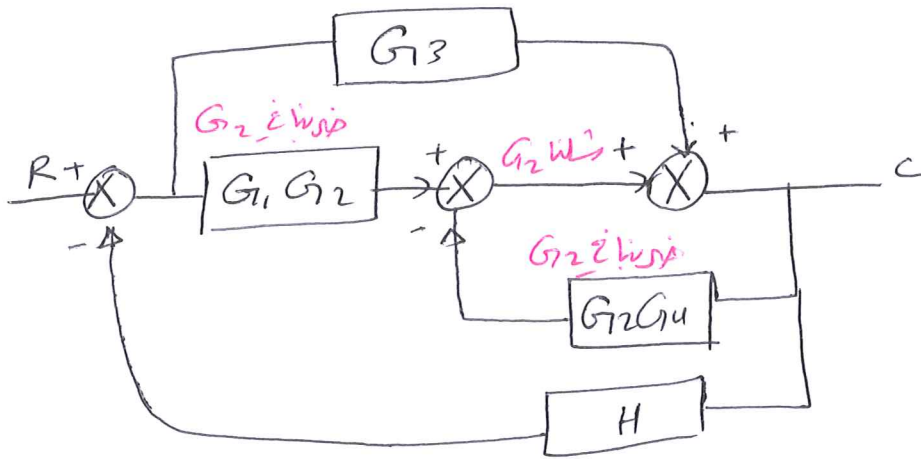
then M feedback with $G_7 \rightarrow \frac{M}{1 + G_7 M}$

$$\frac{C}{R} = \frac{G_6 G_4 + G_6 G_3 + G_6 G_5 G_3 + G_6 G_5 G_2}{1 + G_6 + G_3 G_1 + G_2 G_1 + G_7 G_6 G_4 + G_7 G_6 G_3 + G_7 G_6 G_5 G_3 + G_7 G_6 G_5 G_2 + G_6 (G_4 + G_3)}$$

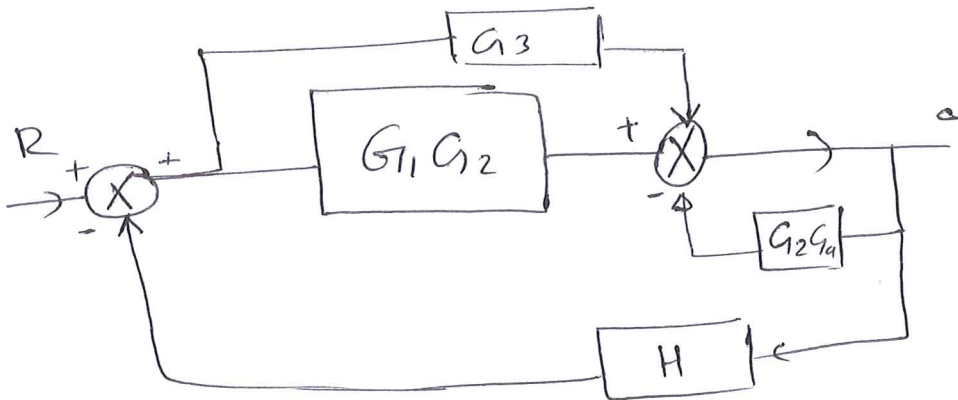
5.4 Reduce the system shown below to a single TF = C/R .



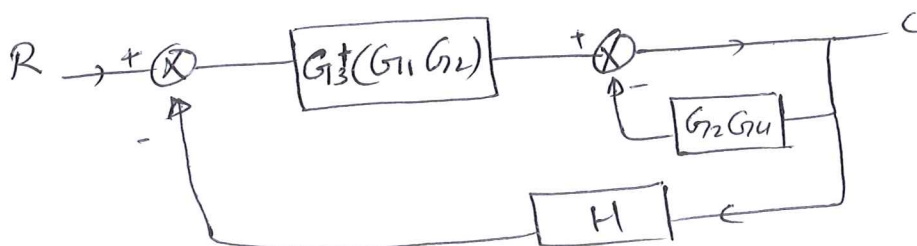
push G_2 to the left past the summing junction



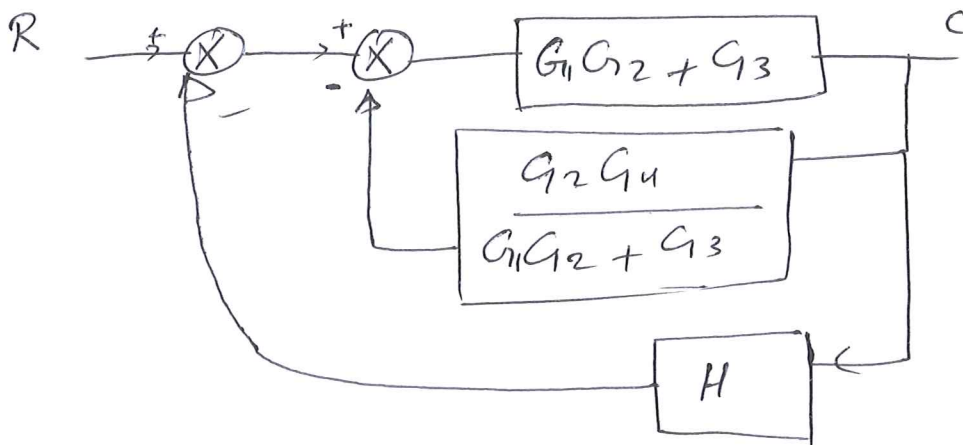
Summation junction Gain = 1
Summation is no longer needed



G_3 and G_1G_2 parallel $G_3 + G_1G_2$

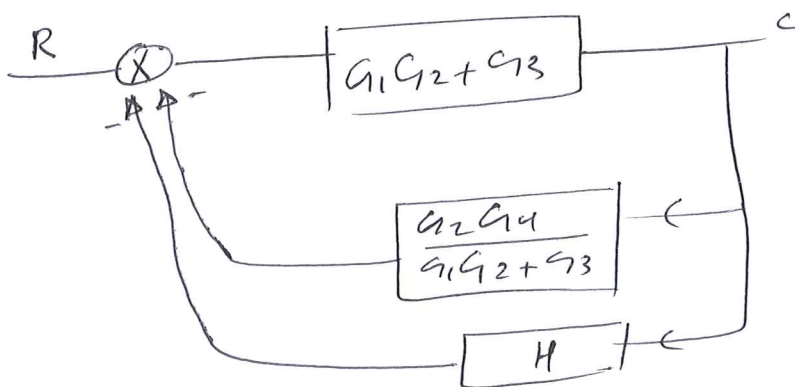


push $G_3 + G_2G_1$ to the right past the summing junction

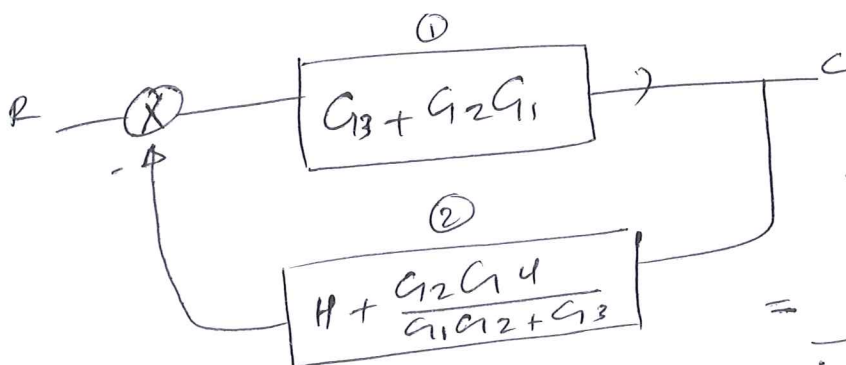


2 summation between it Gain = 1 then
collapse to 1 summation

Now H and $\frac{G_2G_4}{G_1G_2 + G_3}$ parallel



$$H + \frac{G_2G_4}{G_1G_2 + G_3}$$

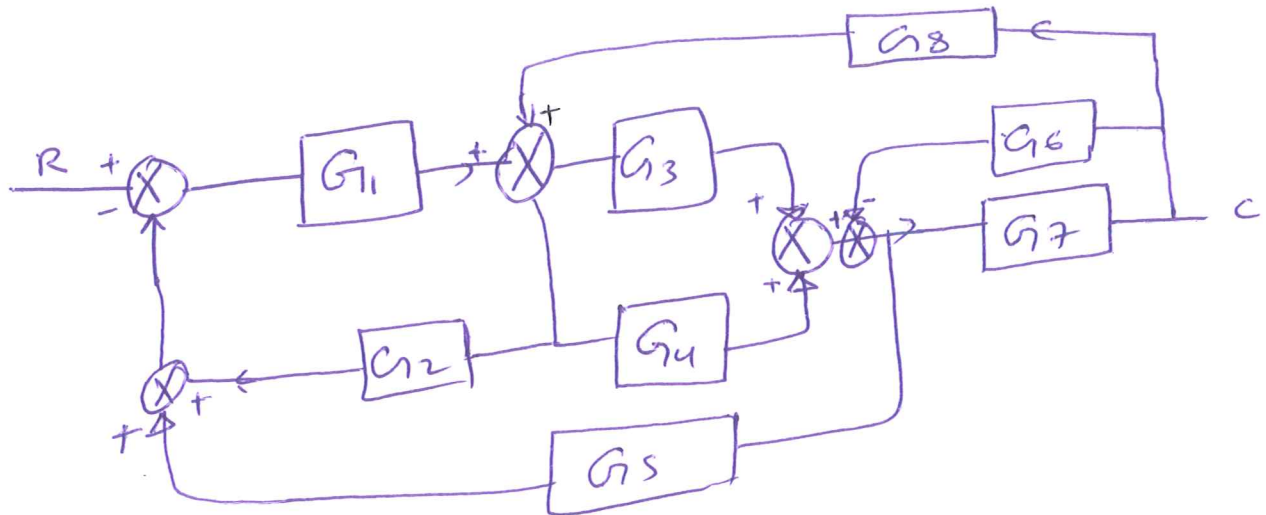


Now feed back

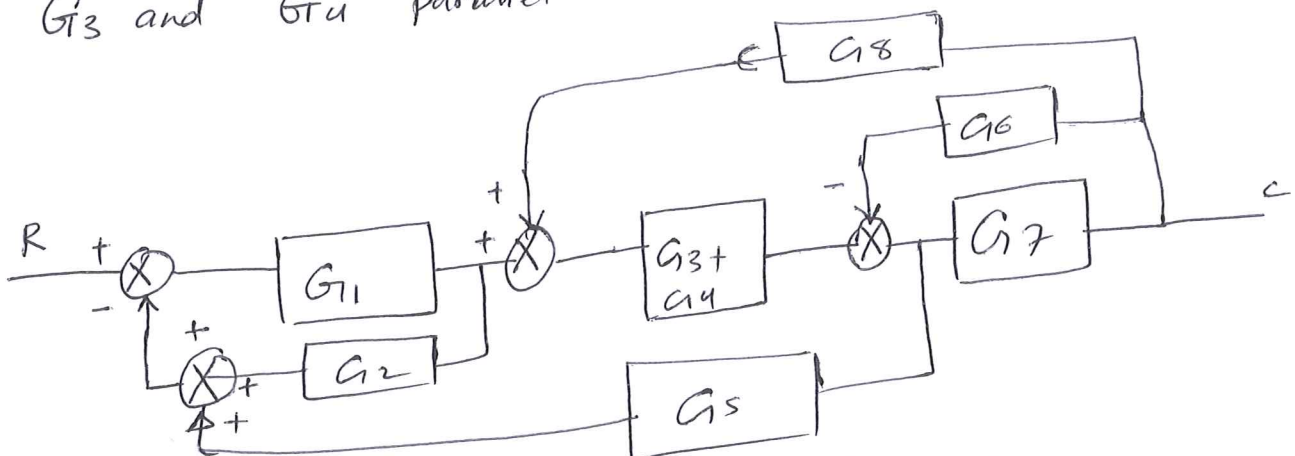
$$\frac{\textcircled{1}}{1 + \textcircled{1}\textcircled{2}} = \frac{G_3 + G_1G_2}{1 + H(G_3 + G_1G_2) + G_2G_4}$$

5.5

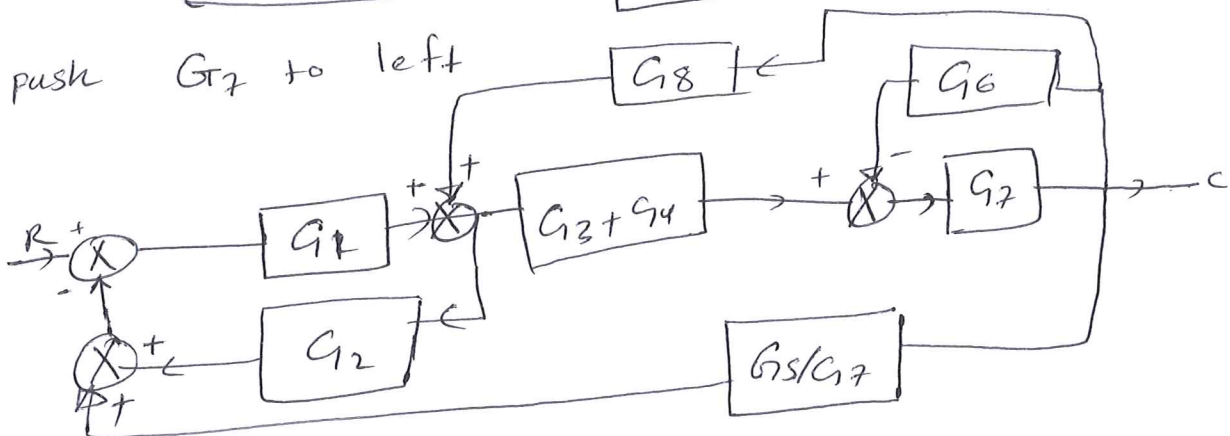
Find $T = C/R$ by using BD Reduction



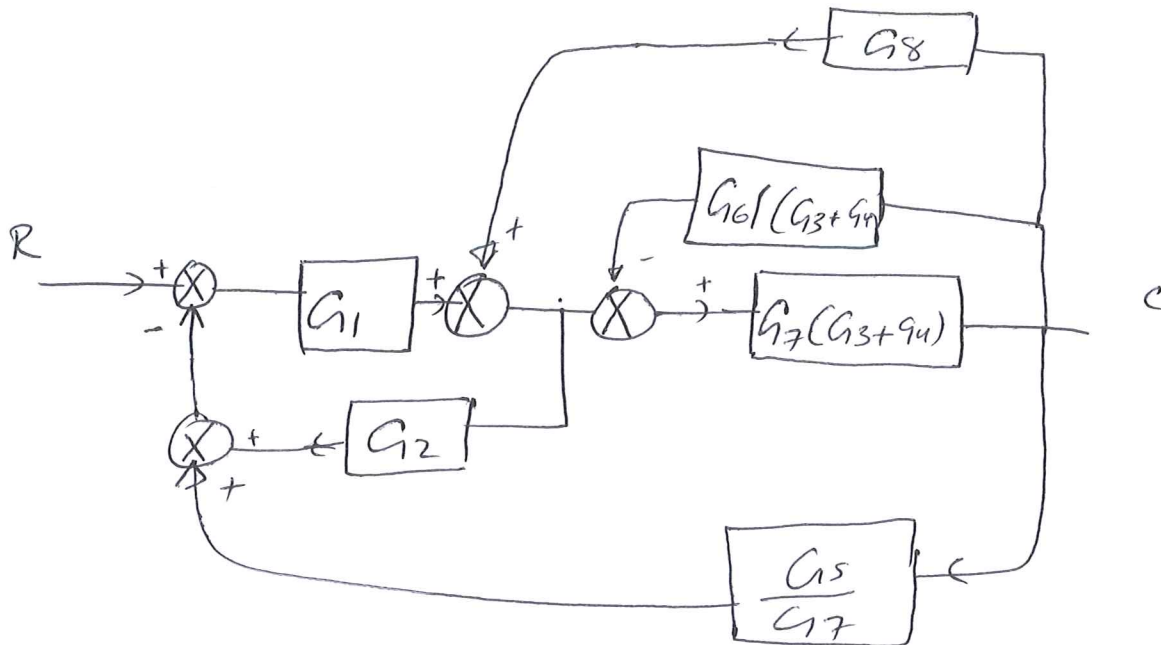
G_3 and G_4 parallel



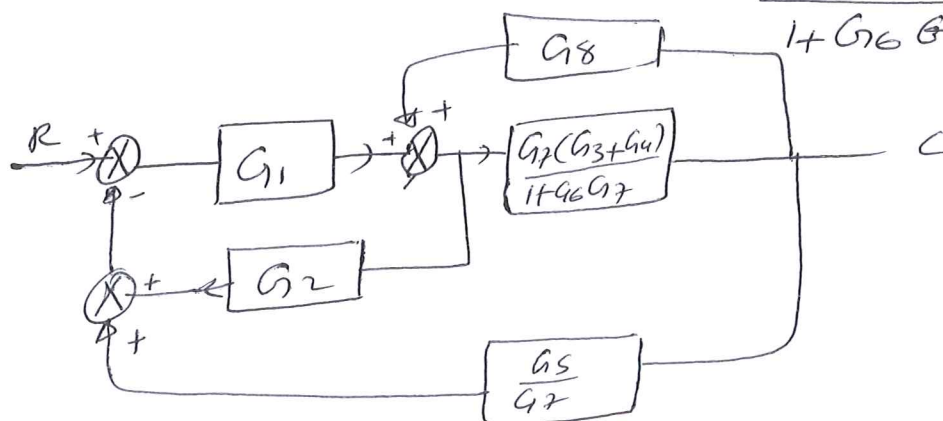
push G_7 to left



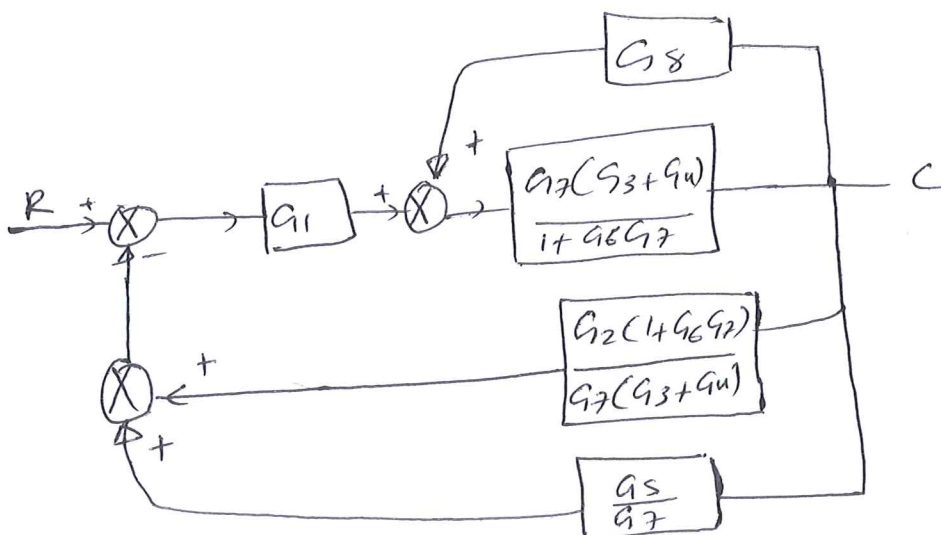
push $G_3 + G_4$ to the right past the summing junction.



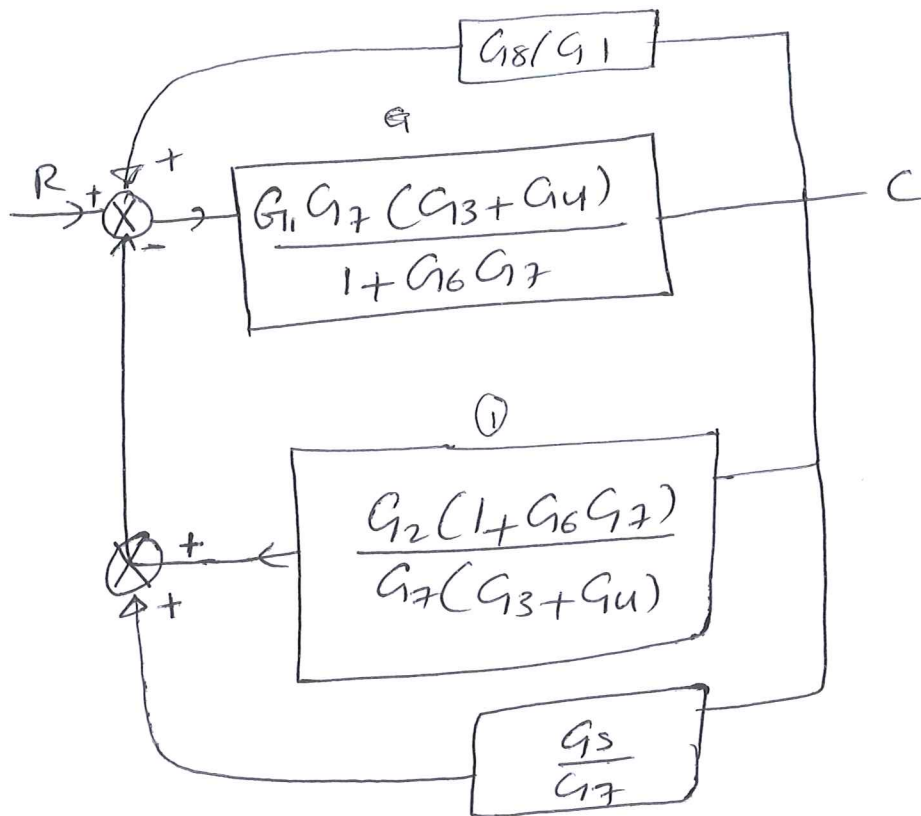
$G_7(G_3+G_4)$ and $\frac{G_6}{G_3+G_4}$ feedback $\frac{G_7(G_3+G_4)}{1 + G_7 G_6 (G_3+G_4) (G_3+G_4)}$
 $= \frac{G_7(G_3+G_4)}{1 + G_6 G_7}$



push $\frac{G_7(G_3+G_4)}{1+G_6G_7}$ to the left past the pickoff point



push G_1 to the right past the summing junction



Now $\frac{G_5}{G_7}$ and G_8/G_1 and Block ① are parallel

$$H = \frac{G_5}{G_7} + \frac{G_2(1+G_6G_7)}{G_7(G_3+G_4)} - \frac{G_8}{G_7}$$

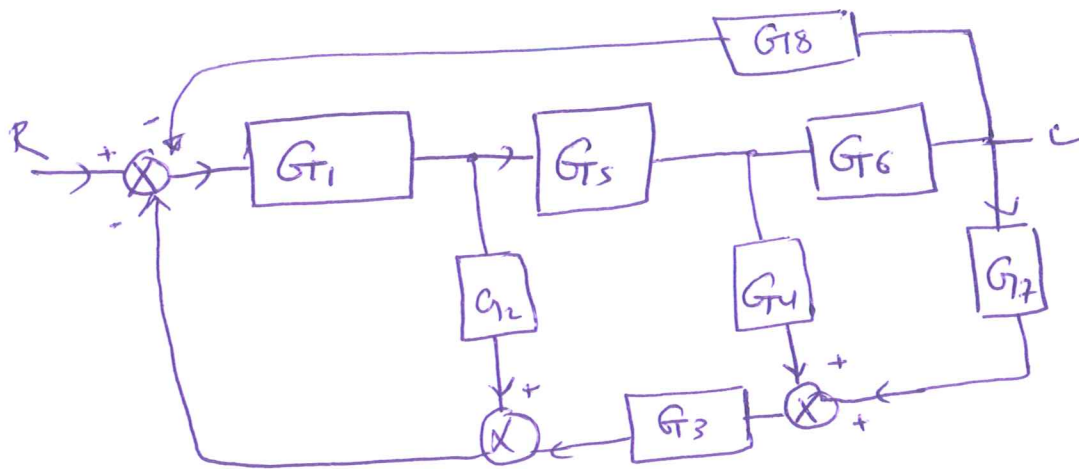
نقطة التقاطع
بالإشارة
Negative feedback
نقطة التقاطع
موجب

positive
feedback

$$T = \frac{G}{1+GH} =$$

$$\frac{G_7G_1(G_4+G_3)}{(G_7G_6+1)G_2G_1 + [G_4+G_3][G_5G_1-G_8G_7] + (G_7G_6+1)}$$

5.6 use BD Reduction to find $T = C/R$



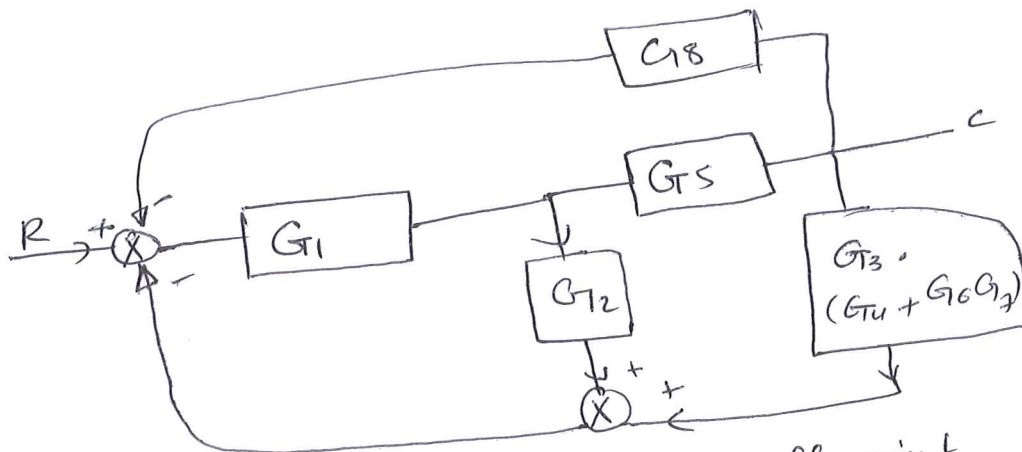
G_6 and G_7 series (cascade) $G_6 \cdot G_7$

then parallel with G_4

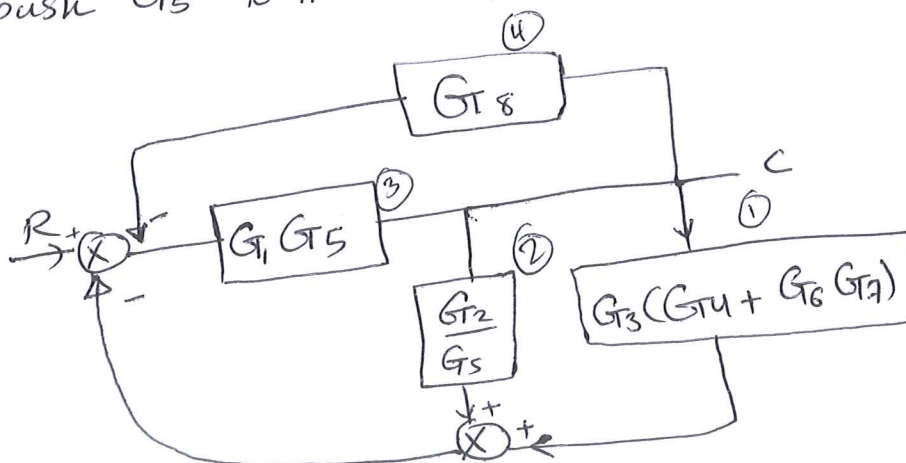
$$G_4 + G_6 G_7$$

then cascade with G_3

$$G_3 (G_4 + G_6 G_7)$$



push G_5 to the left past the pickoff point



(15)

Now ① and ② parallel and ③

$$G_3(G_4 + G_6 G_7) + G_8$$

على الإشارة لا بد من
إشارة الإشارة لا بد من
الأصل هو

$$G_3(G_4 + G_6 G_7) - G_8$$

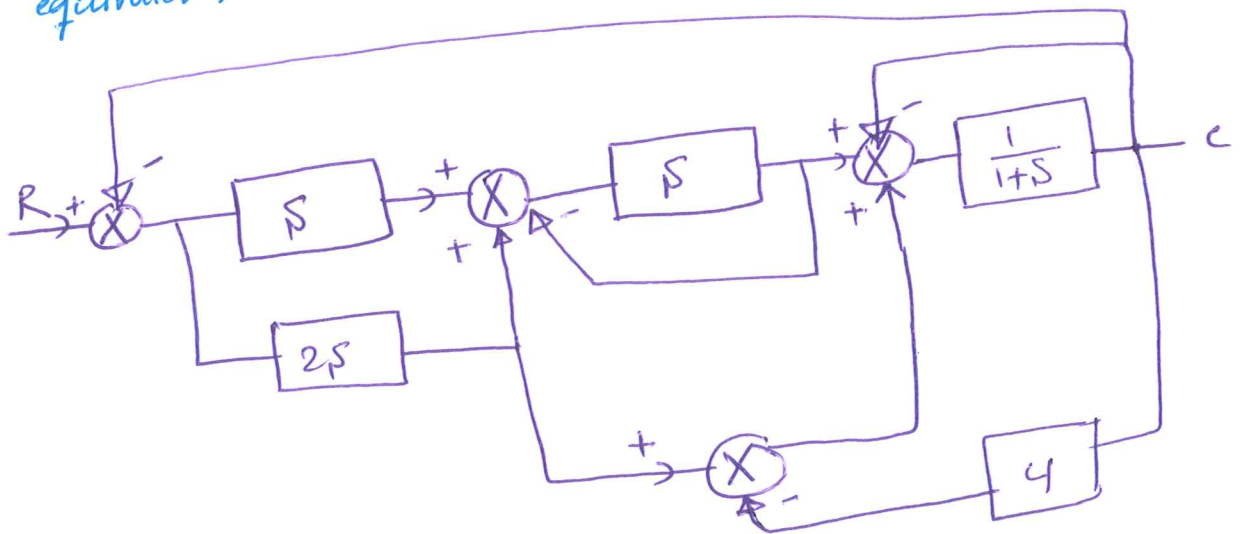
في إشارة - على إشارة
إشارة الإشارة لا بد من

Negative feedback
TF لا بد من
الأصل هو

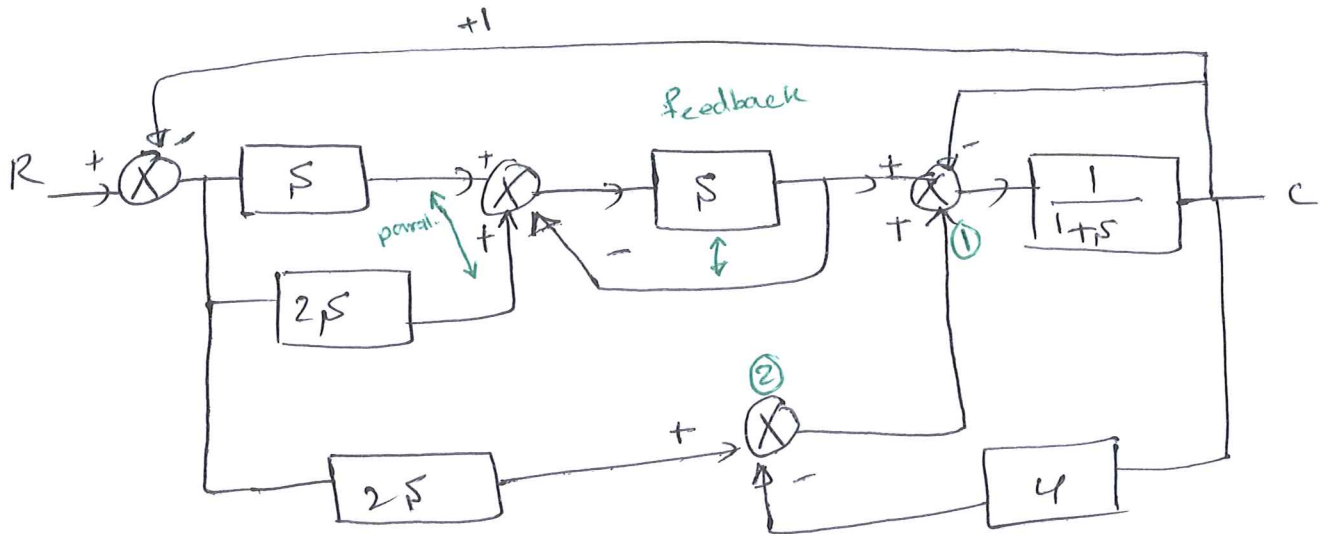
Now $G_3(G_4 + G_6 G_7) + G_8$ feedback with $G_1 G_5$

$$T = \frac{G_2 G_1}{1 + G_1 (G_8 G_5 + G_7 G_6 G_5 G_3 + G_5 G_4 G_3 + G_2)}$$

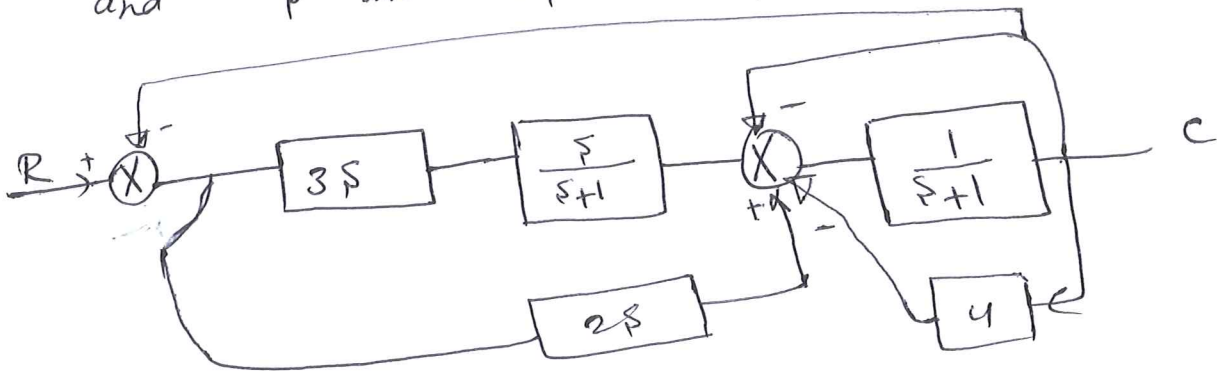
5.7 Find the unity feedback system that is equivalent to the system shown below



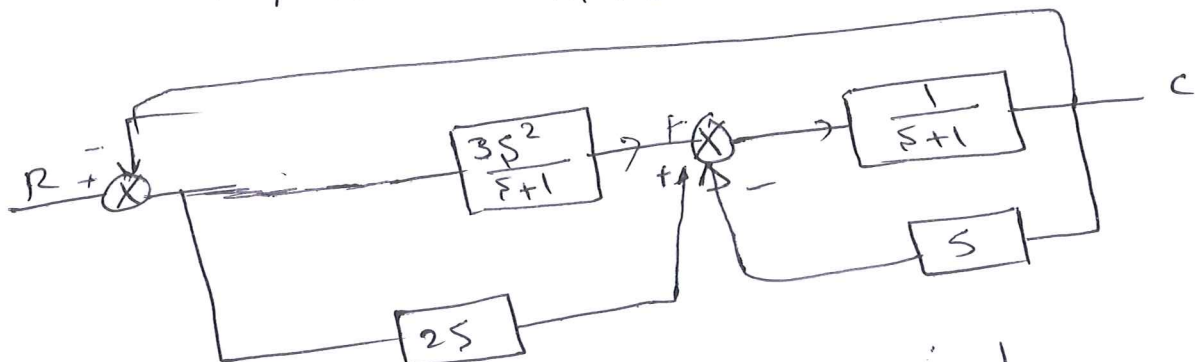
push 25 to the right past the pick off point



collapse and summation ① and ②
 S and $2S$ are parallel $S+2S=3S$


$$3f \text{ and } \frac{f}{f+1} \text{ cascade} \rightarrow \frac{3f^2}{f+1}$$

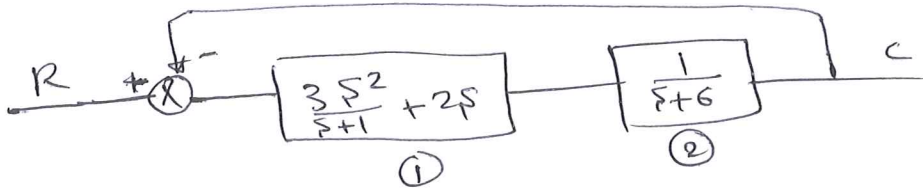
4 and 1 parallel $1+4 = 5$



$\frac{1}{s+1}$ and s feed back $\rightarrow \frac{1}{s+6}$

$$\frac{3 \times 2}{5+1} \quad \text{and} \quad 25 \xrightarrow{\text{Parallel}}$$

$$\frac{3s^2}{s+1} + 2s$$



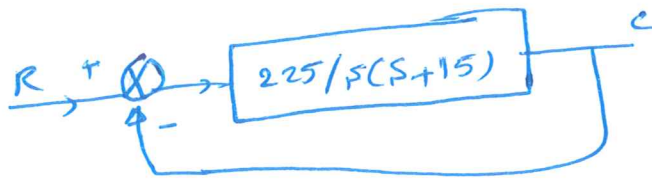
① and ② cascade then unity Negative feedback

$$T = \frac{5s^2 + 2s}{6s^2 + 9s + 6}$$

Analysis and Design of Feedback system.

(Controller) K $\frac{1}{s^2}$
 خواص و مقادیر C_p (ظرف)
 OS , T_s ...

5.11 For the system shown below ^{OS}
find OS, T_s , T_p for a step input.



$$\frac{225}{s(s+15)} \quad \text{and} \quad \text{feedback} \quad T = \frac{225}{s^2 + 15s + 225}$$

second order TF formula $\frac{kdc \omega n^2}{s^2 + 2\zeta \omega n s + \omega n^2}$

$$W h^2 = 225$$

$$w_n = 15$$

, $2f_{wn} = 15$

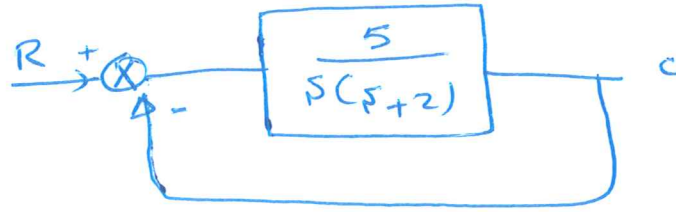
$$f = \frac{1}{2}$$

$$OS = e^{-\pi \beta / \sqrt{1 - \beta^2}} \cdot 100\% = 16.3\%$$

$$T_5 = \frac{4}{p_{wh}} = \frac{4}{7.5} = 0.533$$

$$T_P = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \beta^2}} = 0.242$$

S.12 for the system shown below, find the output $c(t)$, if the input $r(t)$ is a step unit.



$$\frac{C}{R} = \frac{\frac{5}{s(s+2)}}{1 + \frac{5}{s(s+2)}} = \frac{5}{s(s+2) + 5} = \frac{5}{s^2 + 2s + 5}$$

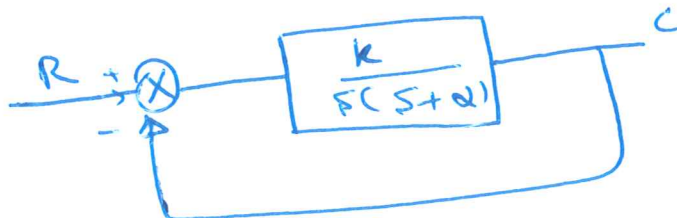
$r(t)$ a step $\longrightarrow R(s) = \frac{1}{s}$

$$C(s) = \frac{5}{s^2 + 2s + 5} \cdot R = \frac{5}{s^2 + 2s + 5} \cdot \frac{1}{s} = \frac{5}{s(s^2 + 2s + 5)}$$

$\mathcal{L}^{-1}$ المبرورون نزل

$$c(t) = 1 - e^{-t} \left(\cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2t \right)$$

S.15 for the system shown below, find k and α to yield a settling time of 0.15s and a 30% overshoot



$$\frac{C}{R} = \frac{\frac{k}{s(s+\alpha)}}{1 + \frac{k}{s(s+\alpha)}} = \frac{k}{s^2 + \alpha s + k}$$

$$0.5 = 0.3 = e^{-\pi \beta / \sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\boxed{\beta = 0.358}$$

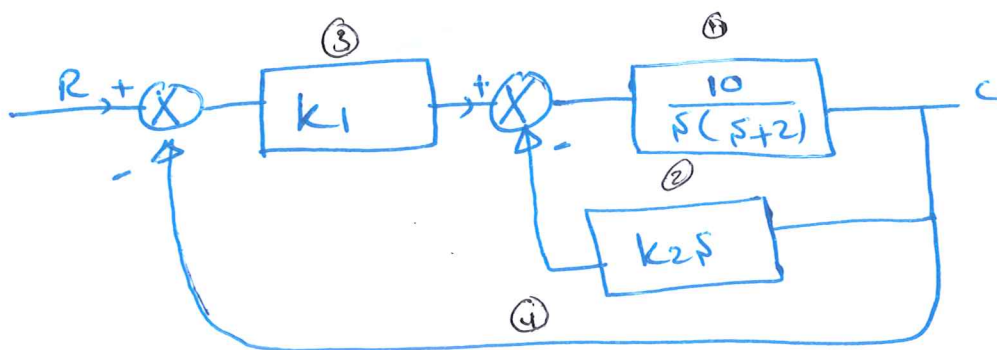
$$\frac{4}{\beta \omega_n} = 0.15 = \frac{4}{0.358 \omega_n} \rightarrow \omega_n = 74.49$$

$$\frac{k}{s^2 + \alpha s + k} = \frac{k d e \omega_n^2}{s^2 + 2 \beta \omega_n s + \omega_n^2}$$

$$k = \omega_n^2 = 5549$$

$$\alpha = 2 \beta \omega_n = 53.33$$

S.16 Find the values of k_1 and k_2 to yield a peak time of 1.5 s and a settling time of 3.2 s for the closed loop system's step response



① and ② feedback then cascade with 3 then feedback with ④

$$\frac{C}{R} = \frac{10 K_1}{s^2 + (10 K_2 + 2) s + 10 K_1}$$

$$\frac{4}{\beta \omega_n} = 3.2 \rightarrow \beta \omega_n = 1.25$$

$$(10 K_2 + 2) = 2 \beta \omega_n = 2 \times (1.25) = 2.5$$

$$\boxed{K_2 = 0.05}$$

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\beta^2}} = 1.5, \quad \omega_n \sqrt{1-\beta^2} = \frac{\pi}{1.5} = 2.09$$

$$T_s = \frac{4}{8\omega_n} \rightarrow 8\omega_n = 1.25 \rightarrow \beta = \frac{1.25}{\omega_n}$$

$$\omega_n \sqrt{1 - \frac{(1.25)^2}{\omega_n^2}} = 2.09$$

$$\omega_n^2 - (1.25)^2 = (2.09)^2$$

$$\omega_n^2 = (1.25)^2 + (2.09)^2 =$$

$$\omega_n^2 = 10k_1$$

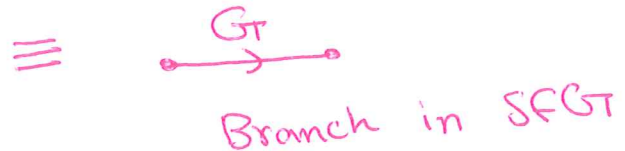
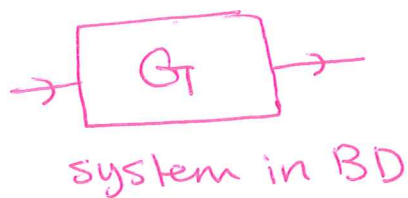
$$k_1 = \frac{\omega_n^2}{10} = \frac{(1.25)^2 + (2.09)^2}{10} = 0.593$$

Signal flow graphs (SFGT)

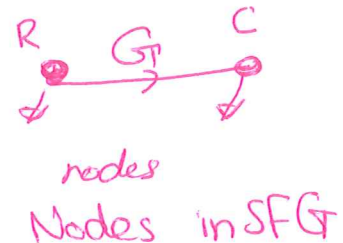
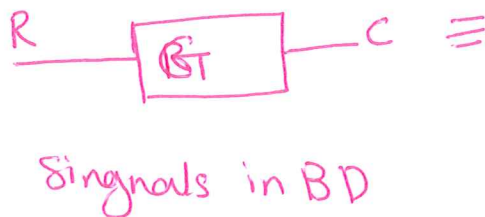
طريقة اخرى للتحليل
عن
system

* SFGT consists of:-

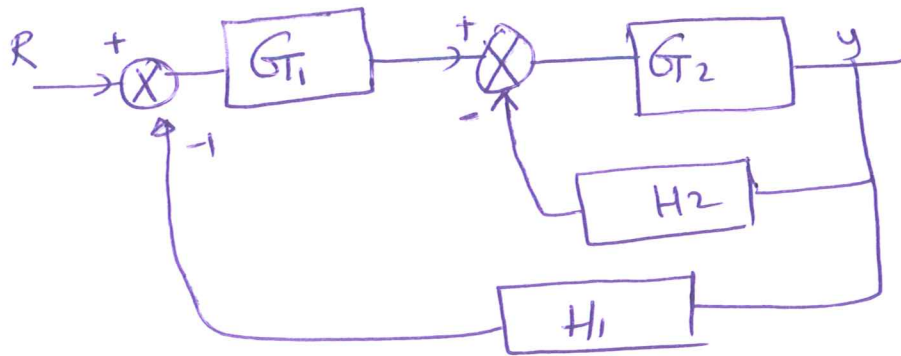
① Branches



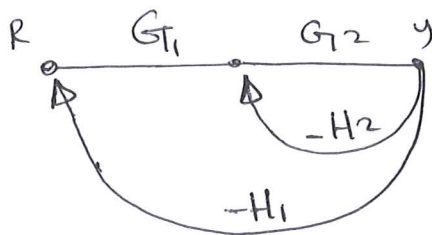
② Nodes



Q:- Convert the BD to SFGT



كل بلوك يقبل لورانس غير ذلك لنور



Mason's Rule: طريقة لتحويل SFGT وإيجاد TF

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^P M_k \Delta_k$$

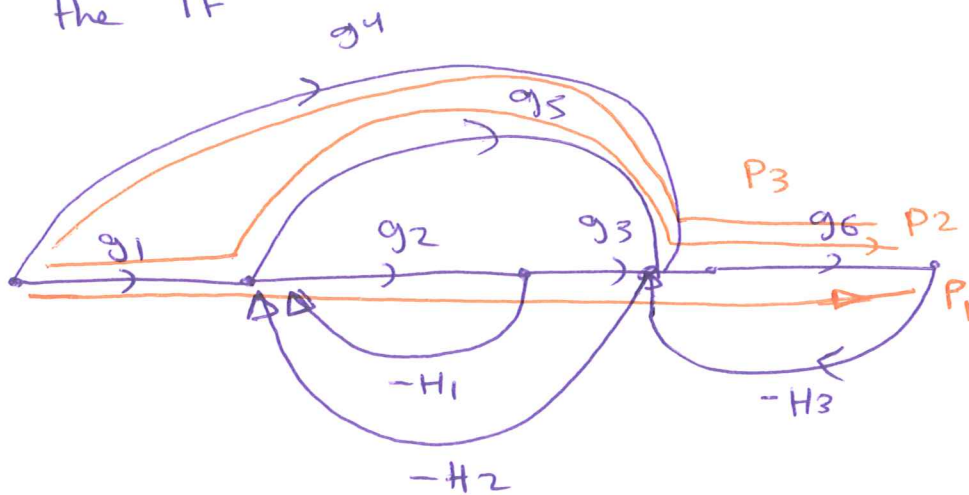
$P \rightarrow$ * forward path جميع المسارات غير المتكررة
التي توصل بين مدخل المخرج (من الإدخال للإدخال)

$M_k \rightarrow$ the gain of k^{th} forward path خلال أي مسار
جميع ضربات ال gains

$\Delta = 1 - \sum \text{single loop gain} + \sum \text{non-touching 2 loops} - \dots$
 $\sum \text{non touching 3 loops} + \dots$

$\Delta_k = 1 - \sum \text{loop gain terms in } \Delta \text{ that touch the } k^{th} \text{ forward path.}$

Find the TF



$$G_T = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^P M_k \Delta k$$

عدد اجزای التي تقبله $P \rightarrow$ = 3
 عدد داخل الفرج
 مع الاستبعاد لا يكون الا اربعة

$\mu_k \rightarrow$ مقدار گین از فشار

$$P_1 \rightarrow M_1 = g_1 g_2 g_3 g_6$$

$$P_2 \rightarrow M_2 = g_1 g_5 g_6$$

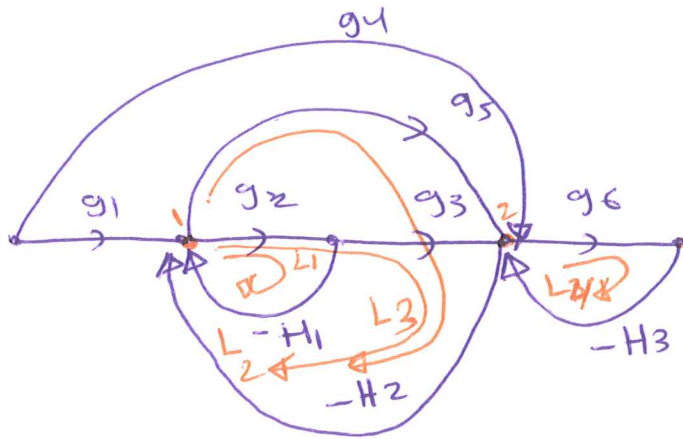
$P_3 \rightarrow M_3 = 9496$

عمر ال loops $L \rightarrow$

loop 4 في حلقة يعني بيدي ابيء من نقطة

وارجواها واستبق انه ال loop كله

لله حلها اكر من loop



عند اختيار اللول ننظر الى بنود التي عندها 1 في المسار الايجابي

$$L_1 = -g_2 H_1, \quad L_2 = -g_2 g_3 H_2$$

$$L_3 = -g_5 H_2, \quad L_4 = -g_6 H_3$$

$$\Delta = 1 - \sum \text{single loop} + \sum \text{non touching 2 loop} - \dots$$

$$= 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + (L_1 L_4)$$

نلاحظ انه L_1, L_2, L_3 مشتركة في البنود 1 لذلك صفها مشتركة
ما يباخرهم في Δ

نلاحظ انه L_4, L_2, L_3 مشتركة في البنود 2 لذلك صفها مشتركة في بنود ما يباخرهم
فذلك L_1, L_4 هما صف غير مشتركين

$$\Delta_k = 1 - \sum \text{loop gain in terms of } \Delta \text{ that touch the } k\text{th forward path}$$

Δ_k + يتبقى من Δ كل اللول التي تتقاطع مع M_k

$$\Delta_1 \Rightarrow M_1 \text{ بدون تقاطع مع } M_1$$

في اللول التي هي متقاطعة معها

كلهم متقاطعة اذا كان لهم متقاطع مع Δ

$$\Delta_1 = 1$$

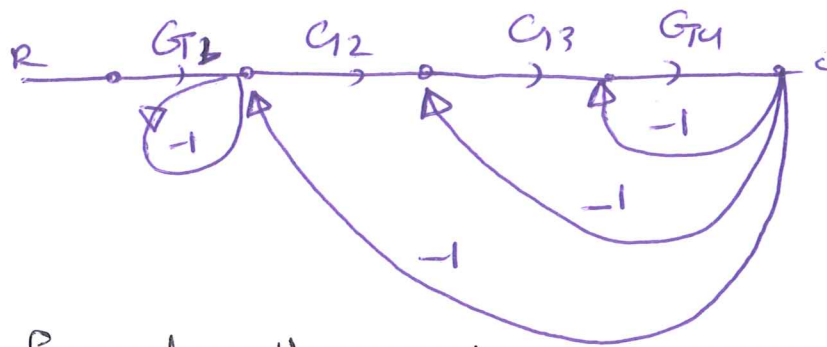
$$\Delta_2 = 1$$

$$\Delta_3 = 1 - L_1 \rightarrow$$

من مخرج M_3 إلى Op بنور

$$G_T = \frac{M_1 \Delta_1 + M_2 \Delta_2 + M_3 \Delta_3}{\Delta}$$

s.26 find $T = C/R$



$P \rightarrow$ * forward path = 1
من المدخل للمخرج

$$M_1 = G_1 G_2 G_3 G_4$$

$L \rightarrow$ loops

$$L_1 = -G_4$$

$$L_2 = -G_3 G_4$$

$$L_3 = -G_2 G_3 G_4$$

$$L_4 = -1$$

لا يدخل L_1 في L_2 من L_2 وهذا L_4
كل واحد على حدة

كل حلقة حلقية انه انفرس
 G_4 بعد G_2 بعد G_3
وهذا حلقة L_4 لانه
في المعرفا بينه في
على النور اكله
في حرة
المعرفا بينه فيه
Loop

$$\Delta = 1 - \sum \text{single loop} + \sum \text{non touching 2 loop} - \dots$$

$$1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + (L_1 L_4 + L_2 L_4)$$

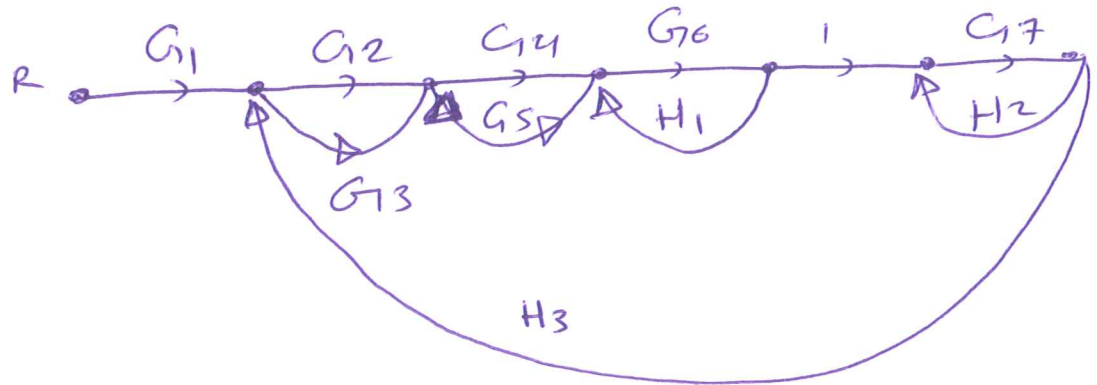
$$1 + (G_4 + G_3 G_4 + G_2 G_3 G_4 + 1) + (G_4 + G_3 G_4)$$

$$\Delta_1 = 1$$

$$T = \frac{C}{R} = \frac{M_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{2 + G_2 G_3 G_4 + 2G_4 + 2G_3 G_4}$$

27

Find $T = C/R$



$P \rightarrow 4$

$$M_1 = G_1 G_2 G_4 G_6 G_7$$

$$M_2 = G_1 G_2 G_5 G_6 G_7$$

$$M_3 = G_1 G_3 G_4 G_6 G_7$$

$$M_4 = G_1 G_3 G_5 G_6 G_7$$

Loops $\rightarrow L_1 = G_2 G_4 G_6 G_7 H_3$

$$L_2 = G_2 G_5 G_6 G_7 H_3$$

$$L_3 = G_3 G_4 G_6 G_7 H_3$$

$$L_4 = G_3 G_5 G_6 G_7 H_3$$

$$L_5 = G_6 H_1$$

$$L_6 = G_7 H_2$$

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6) - (L_5 L_6)$$

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = 1$$

$$T = \frac{M_1 \Delta_1 + M_2 \Delta_2 + M_3 \Delta_3 + M_4 \Delta_4}{\Delta}$$

(26)

Similarity Transformations :-

ممكن انه SS. من و هو بين بكنه نلاقي ان SS. متشابه لنظام

وعنا نتاكد انهم متشابهين لحوصلهم (TF) لازم يكون هو

الذي ليه نوعي SS. وبدي احب واحد آخر متا به ؟!

$$\dot{Z} = P^{-1}APZ + P^{-1}Bu$$

$$y = CPZ + Du$$

$$Z = P^{-1}x$$

5.43 Given the system represented in S.S. as follows:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} -1 & -7 & 6 \\ -8 & 4 & 8 \\ 4 & 7 & -8 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} -5 \\ -7 \\ 5 \end{bmatrix} r$$

$$y = [-9 \quad -9 \quad -8] X$$

Convert the system to one where the new state vector Z , is

$$Z = \begin{bmatrix} -4 & 9 & -3 \\ 0 & -4 & 7 \\ -1 & -4 & -9 \end{bmatrix} X$$

Solution:-

$$Z = P^{-1}X$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 9 & -3 \\ 0 & -4 & 7 \\ -1 & -4 & -9 \end{bmatrix}$$

11) inverse of matrix 3×3

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

(الحدس حول فقط)

① transpose C

كل صف يصبح عمود وكل عمود يصبح صف

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix}$$

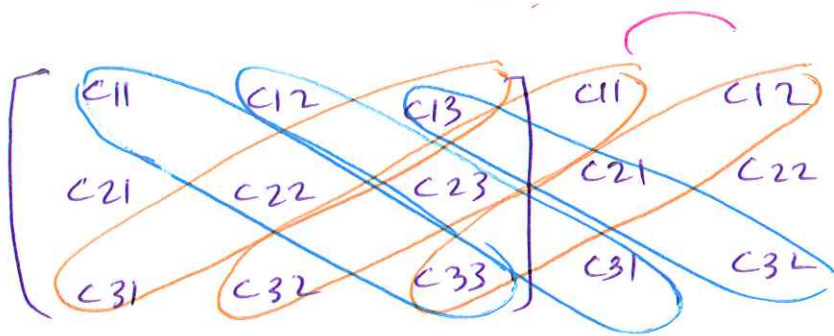
$$\textcircled{2} \quad M = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} c_{22} & c_{32} \\ c_{23} & c_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} c_{12} & c_{32} \\ c_{13} & c_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} c_{12} & c_{22} \\ c_{13} & c_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} c_{21} & c_{31} \\ c_{23} & c_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} c_{11} & c_{31} \\ c_{13} & c_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{13} & c_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} c_{21} & c_{31} \\ c_{22} & c_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} c_{11} & c_{31} \\ c_{12} & c_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{3} \quad B = M * \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{4} \quad C^{-1} = \frac{B}{\det(C)}$$

$\det(C)$

تکرار اول عدد



$$[(c_{11}c_{22}c_{33}) + (c_{12}c_{23}c_{31}) + (c_{13}c_{21}c_{32})] - [c_{11}c_{23}c_{32} + c_{12}c_{21}c_{33} + c_{13}c_{22}c_{31}]$$

* inverse of 2×2 matrix 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}{\det A} = \frac{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}{\det(A)}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 9 & -3 \\ 0 & -4 & 7 \\ -1 & -4 & -9 \end{bmatrix}$$

to find P you should inverse P^{-1}

① Find transpose

(المتناظر)

كل عنصر يغير مكانه
وكل عنصر يغير مكانه

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & -1 \\ 9 & -4 & -4 \\ -3 & 7 & -9 \end{bmatrix}$$

②

$$= \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -4 & -4 \\ 7 & -9 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 9 & -4 \\ -3 & -9 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 9 & -4 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 7 & -9 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -9 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ -9 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 9 & -4 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 64 & -93 & 51 \\ 7 & 33 & -28 \\ -4 & -28 & 16 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 64 & 93 & 51 \\ -7 & 33 & 28 \\ -4 & -28 & 16 \end{bmatrix}$$

det (P^{-1})

$$\begin{bmatrix} -4 & 9 & -3 & -4 & 9 \\ 0 & -4 & 7 & 0 & -4 \\ -1 & -4 & -9 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & [(-4 \times -4 \times -9) + (9 \times 7 \times -1) + (-3 \times 0 \times -4)] \\ & - [(9 \times 0 \times -9) + (-4 \times 7 \times -4) + (-3 \times -4 \times -1)] \\ & = -307 \end{aligned}$$

$$P = \frac{M}{\det(P)} = \frac{\begin{bmatrix} 64 & 93 & 51 \\ -7 & 33 & 28 \\ -4 & 25 & 16 \end{bmatrix}}{-307}$$

$$\begin{bmatrix} -0.208 & -0.3029 & -0.166 \\ 0.022 & -0.1075 & -0.9125 \\ 0.013 & 0.0814 & -0.0512 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}B = \begin{bmatrix} -58 \\ 63 \\ -12 \end{bmatrix}, \quad CP = \begin{bmatrix} 1.56 & 3.04 & 2.73 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 18.59 & 25.47 & 5.614 \\ -12.9 & -28.88 & -8.391 \\ -0.57 & 11.41 & 5.29 \end{bmatrix}$$

$$\dot{z} = (P^{-1}AP)z + (P^{-1}B)z, \quad y = CPz$$

* how you can find the P-matrix

① find eigen value

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

② Now substitute to find eigen vector

$$(\lambda I - A)P_i = 0$$

5.45 Diagonalize the following system.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -5 & -5 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} r$$

$$y = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} x$$

$$(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda + 5 & 5 & -4 \\ -2 & \lambda & 2 \\ 0 & 2 & \lambda + 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$\begin{aligned} & (\lambda + 5) \lambda (\lambda + 1) + 16 - (-10(\lambda + 1) + 4(\lambda + 5)) = 0 \\ & \lambda (\lambda + 5) (\lambda + 1) + 16 + 6\lambda + (-10) = 0 \\ & \lambda^3 + 6\lambda^2 + 5\lambda + 6\lambda + 6 = 0 \\ & \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = 0 \end{aligned}$$

$$\lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = 0$$

بعض جزر اعداد
منه مطروقة كيب بالع
الحدود

$$(\lambda + 3)(\lambda + 2)(\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda_1 = -3, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -1$$

$$\text{Now } (\lambda I - A)(x) = 0$$

$$\begin{bmatrix} \lambda + 5 & 5 & -4 \\ -2 & \lambda & 2 \\ 0 & 2 & \lambda + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

جزرنا في بعض

$$(\lambda + 5)x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0$$

$$-2x_1 + \lambda x_2 + 2x_3 = 0$$

$$2x_2 + (\lambda + 1)x_3 = 0$$

if $\lambda = -1$ فبعض

$$4x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0$$

$$-x_2 - 2x_1 + 2x_3 = 0$$

$$2x_2 = 0$$

$$x_1 = x_3$$

$$x_2 = 0, x_1 = x_3 = 1$$

فبعض

if $\lambda = -2$

$$3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0$$

$$-2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0$$

$$+ 2x_2$$

$$-x_3 = 0$$

$$x_1 = \frac{x_3}{2}$$

$$x_2 = \frac{x_3}{2}$$

$$x_1 = x_2 = \frac{x_3}{2}$$

$$x_1 = x_2 = 1$$

$$x_3 = 2$$

$$\text{if } x_3 = 2$$

$$4x_3 - 5x_2 - 2x_1 = 0$$

$$-2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0$$

$$2x_2 - 2x_3 = 0$$

$$x_2 = x_3$$

$$x_1 = \frac{x_2}{2}$$

$$x_1 = x_2/2 = x_3/2$$

$$, x_1 = 1, x_2 = x_3 = 2$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

لایم تطوع قطریه
و قطریه
λ

$$P^{-1}B = \begin{bmatrix} -12 \\ 8 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$cP = [1 \ 4 \ 7]$$