

Chapter * 8 Root Locus

Root locus + في طريقة (رسم) نرسم فيها عن طريق open poles و معرفة اختيار الـ K بالنسبة لـ closed

خطوات Root locus :-

(1) نرسم الـ Root locus لـ open loop

$$T = \frac{G_T}{1 + G_T H}$$

open loop = $G_T H$

(2) نحدد المحاور  البولي والزيرو

○ ← zero
x ← pole

(3) نرسم الزيرو والبولي على المحاور x -axis مع إحصائيات

(4) إلى رقمه عرزي ببيني (بليو) عينة σ Root locus و

أي رقمه زيرو عابيتي

(5) في قائل حول x -axis ويا لها مزية (أي موزة نفس أي كات)

(6) عدد F كل σ pole

ببينا σ pole وينتهي أي zero

(7) عدد الزيرو σ zero - σ of pole = α

(8) خط التقارب $\sigma_m = \frac{\sum pole - \sum zero}{\alpha}$

(9) زاوية الخرج أو الدخول إلى σ x -axis في حال وجود zero

$$\theta_m = \frac{r 180}{\alpha}$$

$r = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$

$$K = \frac{-1}{G_T H} \bigg|_{s=s_0} \quad (10)$$

break away

break in
break out

← 2 zero

→ (1)

← 2 pole

→

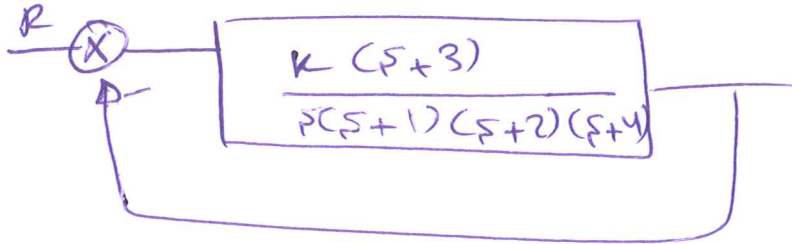
$$GH = \frac{N}{D}$$

$$\frac{d}{ds} (GH) =$$

= break away (2)

$$N D' - N' D$$

Ex 8.2



open loop

$$\frac{K(s+3)}{s(s+1)(s+2)(s+4)}$$

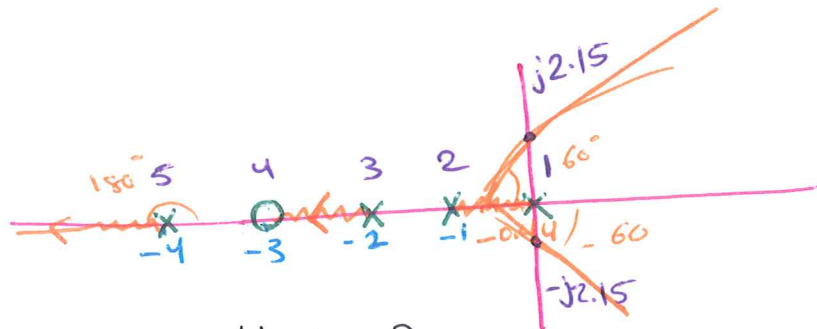
$$= \frac{K(s+3)}{s(s+1)(s+2)(s+4)}$$

zeros

-3

poles

0 -1 -2 -4



$$\alpha = \# \text{ pole} - \# \text{ zero} = 4 - 1 = 3$$

→ الزوايا

$$\theta_m = \frac{\sum \text{pole} - \sum \text{zero}}{\alpha} = \frac{(-1-2-4) - (-3)}{3} = -\frac{4}{3}$$

$$\theta_m = \frac{r180}{\alpha} = \frac{r180}{3} = r60 = \pm 60, +180$$

$$r = \pm 1, +3$$

(2)

Break away $\bar{s}$ 2 poles

2 < 1

$$\frac{d}{ds}(GH) = s^4 + 49s^2 + 12s^3 + 68s + 24 = 0$$

$$s = -4.8 \pm 1.5j \quad \times \quad \text{complex conjugate}$$

$$s = -48.7 \quad \times \quad \text{real}$$

$$s = -0.44$$

✓

Root locus على s axis $\rightarrow$ marginally stable system

$$T(s) = \frac{G}{1+GH} = \frac{k(s+3)}{s(s+1)(s+2)(s+4)}$$

$$= \frac{k(s+3)}{s(s+1)(s+2)(s+4) + k(s+3)}$$

$$s(s+1)(s+2)(s+4) + k(s+3) = 0$$

$$s^3 + 7s^2 + (14+k)s + (3k+8) = 0$$

$$s^3 \quad 1 \quad \frac{7}{14+k}$$

$$s^2 \quad (14+k) \quad 3k+8$$

$$s^1 \quad \frac{4k+90}{14+k} \quad 0$$

$$s^0 \quad 3k+8 \quad 0$$

$$4k+90 > 0$$

$$k > -\frac{90}{4}$$

$$s^2(14+k) + 3k+8 = 0$$

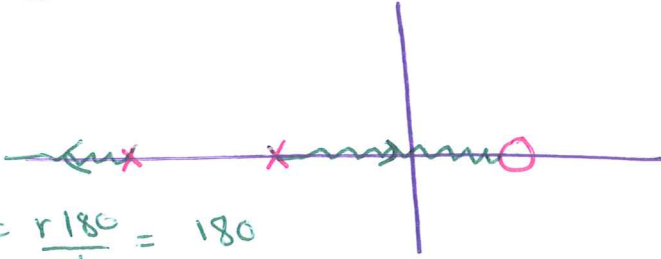
$$-8.5s^2 + -39.5 = 0$$

$$s = \pm j2.15$$

(3)

Extra Examples: -

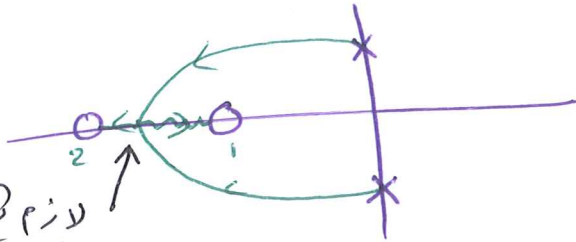
①



$$\theta = \frac{r180}{\alpha} = 180$$

$$\alpha = 2 - 1 = 1$$

②

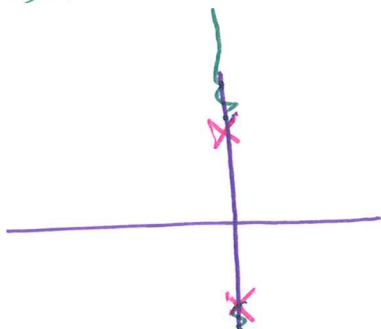


لازم بلو
Break in σ
لازقم قلازقم
ای علی σ axis

ما بین من الزاویه
فنا
انما الزاویه ای
ط بهامه

القافوه
تبلوه ای الزاویه

③

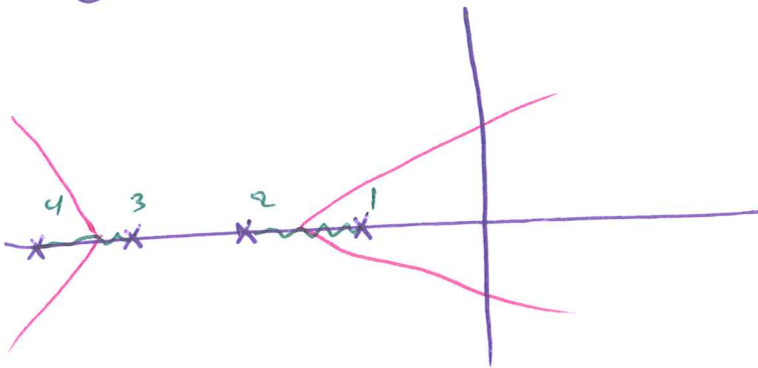


$$r = \pm 1$$

$$\theta = \frac{r180}{\alpha} = r \frac{180}{2} = r90 = \pm 90$$

$$\alpha = 2 - 0 = 2$$

4

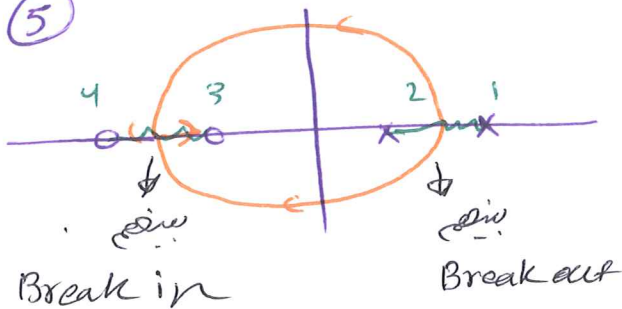


$$\alpha = 4 - 0 = 4$$

$$\theta = \frac{r180}{4} = r45 = \pm 45, \pm 135$$

$$r = \pm 1, \pm 3$$

5



Break in

Break out

6



$$r = \pm 1, \pm 3$$

↓
بالنسبة
أول

$$\theta = \frac{r180}{\alpha} = r \frac{180}{3} = r60 = \pm 60, +180$$

$$\alpha = \# \text{ pole} - \# \text{ zero} = 4 - 1 = 3$$

لا حظ في تقاطع مع axis y لوطينا R Table

التي قيمة ل K تتغير الى

auxiliary أو جدول المعاداة

معادلة $s^2 + \dots$

8.22 For the unity feedback system

$$G(s) = \frac{k(s+10)(s+20)}{(s+30)(s^2 - 20s + 200)}$$

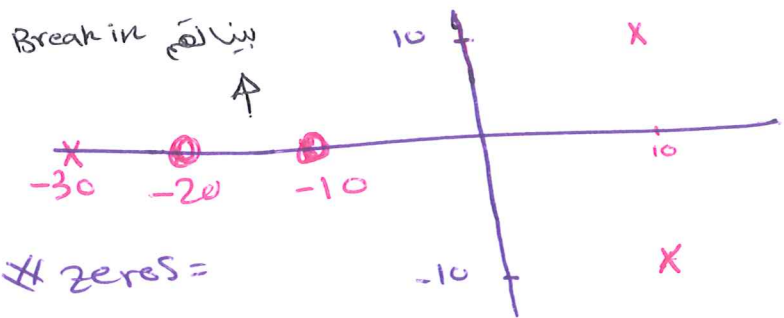
do the following

a) sketch the root locus

$$GH = \frac{k(s+10)(s+20)}{(s+30)(s^2 - 20s + 200)}$$

$s = 10 \pm j10$

Zeros: $-10, -20$
Poles: $-30, 10 - j10, 10 + j10$



$$\alpha = \# \text{ poles} - \# \text{ zeros} = 3 - 2 = 1$$

$$\theta = \frac{\sum \text{pole} - \sum \text{zero}}{1} = \frac{(-30 + 10 - j10 + 10 + j10) - (-10 - 20)}{1} = 20$$

$$\theta = \frac{r180}{\alpha} = r180 = +180$$

لعرفة كل سيم التقاطع مع y-axis

$$T(s) = \frac{k(s+10)(s+20)}{(s+30)(s^2 + 20s + 200) + k(s+10)(s+20)}$$

$$= (s+30)(s^2 + 20s + 200) + k(s+10)(s+20)$$

$$= (s^3 + 50s^2 + 800s + 6000) + k(s^2 + 30s + 200)$$

$$s^3 + (50+k)s^2 + (800+30k)s + (6000+200k)$$

$$\begin{array}{rcl} s^3 & 1 & 800+30k \\ s^2 & (50+k) & 6000+200k \end{array}$$

$$s^1 \quad \left| \begin{array}{cc} 1 & 800+30k \\ 50+k & 6000+200k \end{array} \right| = 0$$

$$\frac{30k^2 + 2100k - 2000}{50+k}$$

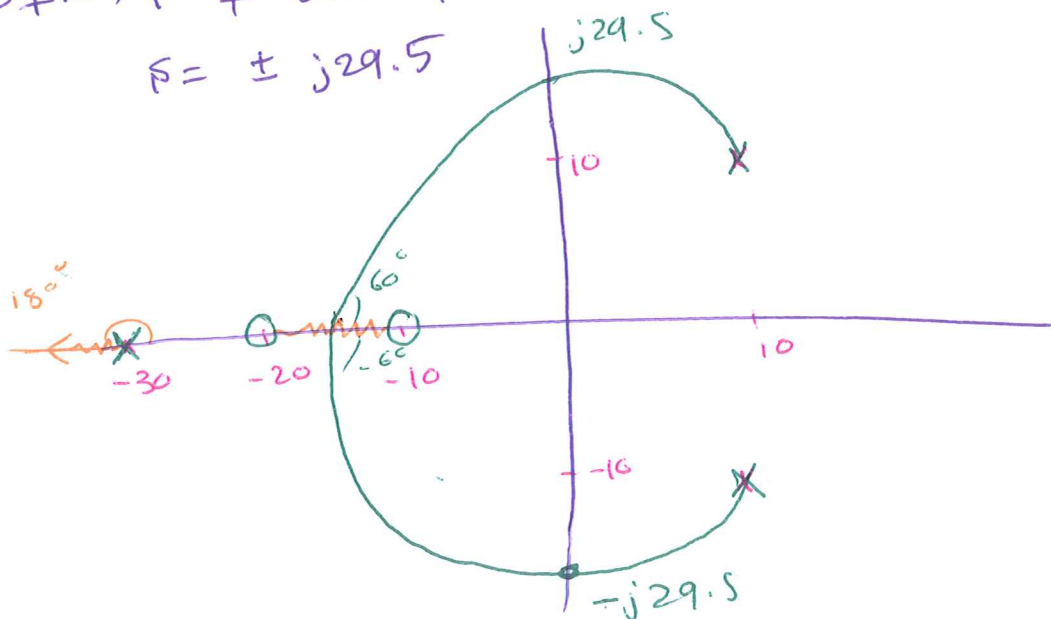
$$s^0 \quad 6000+200k \quad 0$$

$$\frac{30k^2 + 2100k - 2000}{50+k} = 0$$

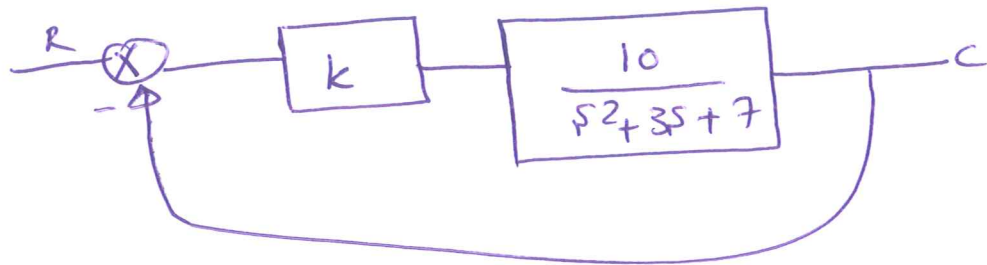
$$k = \pm \frac{5 \pm \sqrt{965}}{3} - 35$$

$$(50+k)s^2 + 6000 + 200k = 0$$

$$s = \pm j29.5$$



Ex:



Design specification

$$OS \leq 20\%$$

$$tr \leq 0.55 \text{ sec}$$

$$ts \leq 3.1 \text{ sec}$$

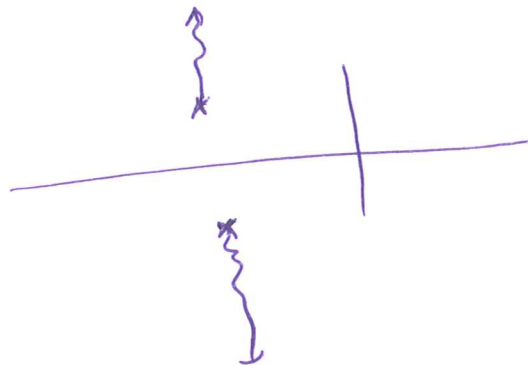
$$\frac{k}{s^2 + 3s + 7}$$

$$s^2 + 3s + 7 = 0$$

$$s = -1.5 \pm j2.1$$

$$\theta = \frac{r180}{2} = \pm 90$$

find k



$$OS = 0.2 = e^{-\pi \beta / \sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\beta = 0.207$$

$$ts = \frac{4}{\beta \omega_n} = 3.1$$

$$\omega_n = 6.23$$

$$s_{1,2} = -\beta \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1-\beta^2}$$

$$= -1.5 \pm j2.93$$

$$k = \frac{-1}{\sigma_H} \bigg|_{s = -1.5 \pm j2.93} = 0.382$$

طاقة الى (8)

العمل على الحد من نسبة الجهد
ويعمل على تقليل نسبة الجهد
(8)